Oversikt over obligatoriske oppgaver

Det blir syv obligatoriske oppgaver i kurset. De leveres elektronisk som pdf ved å følge lenken du kommer til ved å klikke på datoen. Oppgavene rettes som bestått / ikke bestått. Hvis du ikke kan levere oppgaven på grunn av sykdom må du kontakte meg og dokumentere dette med en legeattest.

|  |  |
| --- | --- |
| Tidspunkt | Oppgaver fra læreboken |
| [1/9](https://mitt.uib.no/courses/29776/assignments/47810) | 1.7, 2.5, 2.11, 2.16, 2.17, 2.18, 2.32, 2.33 |
| 15/9 | 3.6, 3.12, 3.18, 3.16, 3.19, 3.20  |
| 29/9 | 4.10, 5.3, 5.8, 5.18, 6.8, 6.13 + [Oppgave: Binomialteoremet.](https://mitt.uib.no/courses/29776/pages/binomialteoremet) |
| 13/10 | 7.1, 7.5, 7.9, 7.17, 7.21, 7.33b), 7.35 |
| [27/10](https://mitt.uib.no/courses/29776/assignments/51121)  | [Oppgaver for innlevering 5](https://mitt.uib.no/courses/29776/pages/innlevering-5) + 7.26 og 7.28 |
| [10/11](https://mitt.uib.no/courses/29776/assignments/51885)  | [Oppgaver for innlevering 6](https://mitt.uib.no/courses/29776/pages/innlevering-6)  |
| [01/12](https://mitt.uib.no/courses/29776/assignments/52032)   | [Oppgaver for innlevering 7](https://mitt.uib.no/courses/29776/pages/innlevering-7) |

Se kompendiet for oppgavene som er nummererte.

[Oppgave: Binomialteoremet.](https://mitt.uib.no/courses/29776/pages/binomialteoremet):

# **Binomialteoremet**

Denne oppgaven går ut på å bevise binomialteoremet ved hjelp av induksjon.

1. Vis at
(nk)=(n−1k)+(n−1k−1)
for alle n og k der symbolene er definert.
2. La x og y være elementer i en kommutativ ring R med multiplikativ enhet 1R. Vis at hvis vi skriver
 (x+y)n=c(0,n)xn+c(1,n)xn−1y+c(2,n)xn−2y2+⋯+c(n,n)yn
der koefficientene c(k,n) er heltall, da er
c(k,n)⋅1R=c(k,n−1)⋅1R+c(k−1,n−1)⋅1R
for alle n og k der symbolene er definert.
3. Bruk 1. og 2. til å gi et induktivt bevis for at
(nk)⋅1R=c(k,n)⋅1R
for alle n og k der symbolene er definert.

**Oppgaver for innlevering 5:**

# **Innlevering 5**

Oppgave 1

Hva konvergerer følgen an=(1−1n)n mot når n går mot uendelig?

Oppgave 2

La A være en ikke endelig delmengde B. Hvis B er tellbar vis at også A er tellbar (jf. Definisjon 7.9.3).

Oppgave 3

La A være mengden som består av bokstavene i for- og etternavnet ditt samt bokstavene i ordet 'universitet'.

Velg en rekkefølge a0,a1,...,an−1 på bokstavene i A og skriv ned bokstavene ned i valgt rekkefølge. La

være funksjonen fra Zn til seg selv gitt ved formelen f(x)=−x+1.

Skriv opp Cesar koden for ordet 'universitet' under funksjonen f.

Oppgave 4

a) La funksjonen f være definert på intervallet (1,∞) og sender x↦x.

Vis at gitt x og y i intervallet (1,∞) er avstanden mellom f(x) og f(y)

mindre eller lik enn halvdelen av avstanden mellom x og y.

b) La {xn}n≥1 være følgen med xn=1+1n.

Vis at følgen {f(xn)}n≥1 er en Cauchy-følge.

c) Beregn grensen til følgen {f(xn)}n≥1.

Gjør også oppgave 7.26 (merk at a∈X) og 7.28 fra kompendiet.

Oppgaver for innlevering 6:

# **Innlevering 6**

Oppgave 1: Gjør 8.2 i kompendiet.

Oppgave 2: Gjør 8.15 i kompendiet.

Oppgave 3: Gjør 8.18 i kompendiet.

Oppgave 4. La x∈R og n≥0. Vis følgende

a) ∑k=0n(nk)xk(1−x)n−k=1.

b) ∑k=0nk(nk)xk(1−x)n−k=nx

c) ∑k=0nk(k−1)(nk)xk(1−x)n−k=n(n−1)x2.

d) ∑k=0nk2(nk)xk(1−x)n−k=n2x2+nx(1−x).

e) nx(1−x)≤n4.

f)  ∑k=0n(nx−k)2(nk)xk(1−x)n−k=nx(1−x)≤n4.

Definisjon: La f:[0,1]→R. Vi definerer polynomet av grad n ved

                    Bnf(x)=∑k=0nf(kn)⋅(nk)xk(1−x)n−k.

Oppgave 5: Bevis følgende teorem (bruk 4 a) og f)).

Teorem: For enhver kontinuerlig funksjon f:[0,1]→R, så vil Bnf(x)→n→∞f(x) for alle  x∈[0,1].

Oppgave 6:

a ) Gitt en sammensatt funksjon f(x)=1 hvis x∈Q eller  f(x)=0 hvis x∈R∖Q.

Vis at f:R→R er diskontinuerlig i alle punkter.

b) Gitt en sammensatt funksjon f(x)=x hvis x∈Q eller  f(x)=0 hvis x∈R∖Q.

Er f:R→R  diskontinuerlig i alle punkter?

Oppgave 7:

a) Vis at summen gitt ved:  ∑n=0∞n2n  er konvergent

b) Vis at ∑n=0∞n2n=∑n=0∞12n .

c) Kan du generalisere formelen for ∑n=0∞nxn  hvis  x∈(−1,1) ?

Oppgave 8

a) La {an}n≥1 være konvergent. Vis at

               bn=1n∑k=1nak

konvergerer til samme grense.

b) Hva er limn→∞1n∑k=1n1k ?

**Oppgaver for innlevering 7:**

# **Innlevering 7**

Vi kommer til å jobbe med følgende oppgaver ut semesteret:

Del 1 (Kap. 9):

Oppgave 1. Gjør 9.12 i kompendiet.

Oppgave 2. Gjør 9.31 i kompendiet.

Oppgave 3. Gjør 9.32 i kompendiet.

Del 2  (Metrikk):

Oppgave 4.

a) Gjør 10.4 i kompendiet.

b) Gjør 10.5 i kompendiet.

c) Gjør 10.57 i kompendiet.

d) Gjør 10.59 a) i kompendiet.

e) Gjør 10.60 a) i kompendiet.

Del 3:

Oppgave 5. (Heine Borel)

a) Gjør 10.49 i kompendiet.

b) Gjør 10.53 i kompendiet.

c) Gitt (X,d) hvor d er d(x,y)=∑i=1∞2−i|xi−yi|  og

                          X={(1n)k≥1:n∈N∖{0}},

    hvor X er settet av alle konstante følger på formen 1n  eller  X=({1,1,...,1,...},{12,12,...12,...},....,{1n,1n,...1n,...},...).

   Vis at X⊆X er lukket og begrenset.

d)  Er X kompakt?

e) La nå  U:=X∪{0,0,....,0,....}. Er (U,d) kompakt om d(x,y)=∑i=1∞2−i|xi−yi| ?

Del 4 (Kompletthet og kompletteringer):

Definisjon (Sekvensrom):

* Vi definerer (l1,|⋅|1) til å være rommet av alle sekvenser {x(i)}i≥1⊂R slik at  |x|1=∑i=1∞|x(i)|<∞.
* Vi definerer (l2,|⋅|2) til å være rommet av alle sekvenser {x(i)}i≥1⊂R slik at  |x|2=∑i=1∞|x(i)|2<∞.
* Vi definerer (l∞,|⋅|∞) til å være rommet av alle sekvenser {x(i)}i≥1⊂R slik at  |x|∞=supi≥1|x(i)|<∞.

Oppgave 6.

a) La  d2 være den Euklidske metrikken gitt i oppgave 10.5. Vis at  (Rn,d2) er komplett ved å verifisere definisjon 10.2.8.

b) Vis at en delmengde av et komplett metrisk rom er komplett hvis og bare hvis den er lukket.

c) La c0 være rommet av alle følger i R som konvergerer mot null. Vis at c0 er lukket i l∞.

d) La c00={{x(i)}i≥1∈R:∃N>0s.a.x(i)=0forallei≥N}. Vis at kompletteringen av c00 er c0.

Oppgave 8. Hvis ∑i=1nai konvergerer til a∈R, så vil limN→∞∑i=N∞ai=0.

Oppgave 9.

a) Vis ved induksjon at l1⊂l2.

b) Argumenter at c00⊂l1⊂l2.

c) Vis at c00 er tett i l2.

d) Konkluder at l1 er tett i l2.

Oppgave 10. Vis at to kompletteringer av et metrikk rom er isometriske.