Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i emnet MAT112 - Grunnkurs i Matematikk II
Onsdag 25. mai 2022, kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemiddel: Enkel kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1–9) og er sammensatt av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering.

Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregninger til at fremgangsmåten tydelig fremgår av besvarelsen.

Oppgave 1

La følgen $\{a_n\}$ være gitt ved

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4}, \ n \geq 1.$$

(a) Vis at følgen er strengt avtagende og nedad begrenset.

Løsning: Vi viser induktivt at følgen er strengt avtagende. Det er klart at $a_2 = 7/4 < a_1$. Anta nå at $a_n < a_{n-1}$. Da er

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} < \frac{a_{n-1}^2 + 3}{4} = a_n,$$

da funksjonen der tar x til $(x^2+3)/4$ er strengt voksende. Det er klart fra definisjonen at $a_n \geq 0$ for alle n, så følgen er nedad begrenset av 0.

(b) Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Løsning: Da følgen er avtagende og nedad begrenset vet vi fra et teorem i læreboken at den er konvergent. La $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Nå bruker vi at funksjonen der tar x til $(x^2 + 3)/4$ er kontinuerlig slik at

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 3}{4} = \frac{a^2 + 3}{4},$$

som er ekvivalent til ligningen $a^2 - 4a + 3 = 0$. Denne har løsningene 1 og 3. Da vi vet at $a \leq 2$ følger svaret $a = 1$.

Oppgave 2

Funksjonen $T(x, y) = 1 + 4x + 4y - x^2 - 2y^2$ gir en temperaturfordeling i xy-planet.

(a) Finn gradienten $\nabla T(x, y)$ og den retningsderiverte til T i punktet $(1, 0)$ i retningen gitt ved vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Løsning: Gradienten er

$$\nabla T(x, y) = (4 - 2x)\mathbf{i} + (4 - 4y)\mathbf{j}.$$

Den retningsderiverte i $(1, 0)$ i retningen gitt ved $\mathbf{v}$ er da

$$\nabla T(1, 0) \bullet \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \bullet (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2} = 6/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

(b) En varmesøkende partikkel beveger seg i planet gjennom origo og følger hele tiden den retningen der temperaturen øker mest. Finn en ligning for kurven som beskriver banen.

Løsning: La $(u(t), v(t))$ være en parametrisering av kurven på et intervall slik at $(u(t_0), v(t_0)) = (0, 0)$ for en parameterverdi t_0. Vi vet at tangentvektoren til kurven er parallell med gradientvektoren for hvert t, slik at

$$u'(t)\mathbf{i} + v'(t)\mathbf{j} = k(t)\nabla T(u(t), v(t)) = k(t)((4 - 2u(t))\mathbf{i} + (4 - 4v(t))\mathbf{j}),$$

der $k(t)$ er en skalar som avhenger av t. Dette gir ligningen

$$\frac{u'(t)}{4 - 2u(t)} = \frac{v'(t)}{4 - 4v(t)} \quad \text{og dermed} \quad \frac{2u'(t)}{2 - u(t)} = \frac{v'(t)}{1 - v(t)}.$$

Her kan vi anta at $u(t) < 2$ og $v(t) < 1$ i et intervall om t_0. Vi integrerer begge sider

$$-2\ln(2 - u(t)) = -\ln(1 - v(t)) + \text{konstant}$$

som er ekvivalent til

$$\ln((2 - u(t))^2) = \ln(1 - v(t)) + \text{konstant}.$$

Nå bruker vi eksponentialfunksjonen og får ligningen $(2 - u(t))^2 = (1 - v(t))C$, der C er en konstant. Setter vi inn t_0 finner vi at $C = 4$. Banen til kurven er derfor beskrevet ved ligningen $(2 - x)^2 = (1 - y)4$ som kan skrives $y = x - \frac{1}{4}x^2$.

Oppgave 3

Kurven C er gitt i polarkoordinater ved

$$r = 1 + \cos 2\theta, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

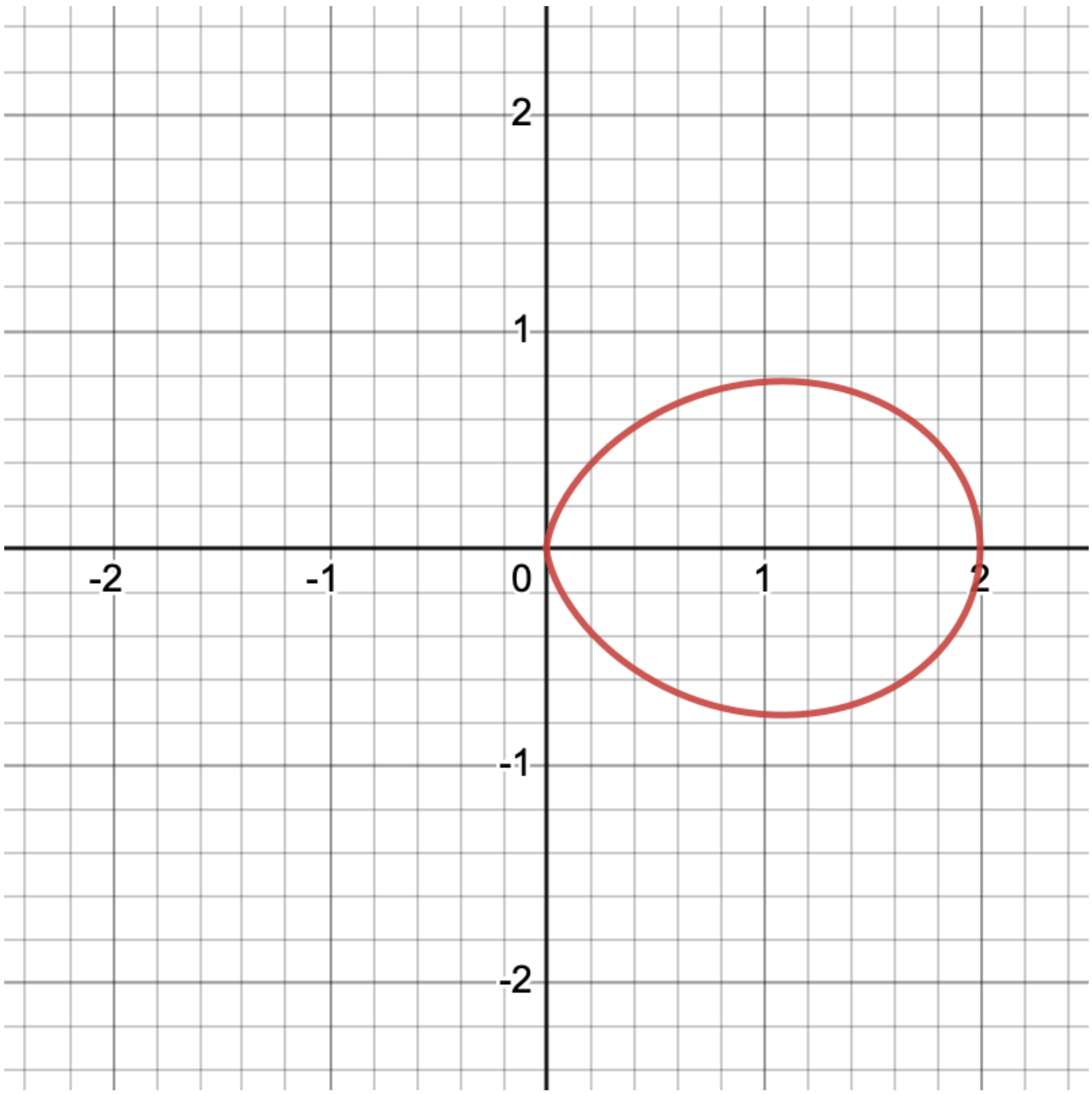
(a) Finn punktet på C med størst avstand til origo og lag en skisse av kurven.

Løsning: Punktet med størst avstand til origo har polare koordinater $[2, 0]$ (og vanlige kartesiske koordinater $(2, 0)$).

For å lage en skisse av kurven kan vi for eksempel bemerke følgende:

- I punktet med størst avstand til origo vil tangentlinjen til kurven være ortogonal på radiallinjen fra origo til punktet (se Seksjon 8.6 i læreboken). Dette viser at kurven har en vertikal tangentlinje i punktet med polare koordinater $[2, 0]$.
- Når punkter $[r, \theta]$ på kurven nærmer seg origo vil $1 + \cos 2\theta$ konvergere mot 0, slik at θ vil konvergere mot $\pi/2$ eller $-\pi/2$.
- Da $1 + \cos 2\theta \geq 0$ når $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ vil kurven ligge i 1. og 4. kvadrant.

Det kan også hjelpe å huske på formen av grafen til funksjonen $1 + \cos 2\theta$.


2
1
-2
-1
0
1
2
-1
-2

(b) Finn arealet av området begrenset av kurven.

Løsning: Arealet er gitt ved

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)^2 \; d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta \; d\theta.$$

Vi beregner integralene:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \; d\theta = \pi$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos 2\theta \; d\theta = [\sin 2\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 2\theta \; d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 4\theta + 1 \; d\theta = \frac{1}{2}[\tfrac{1}{4}\sin 4\theta + \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2.$$

Dette gir $A = \frac{1}{2}(\pi + 0 + \pi/2) = 3\pi/4$.

Oppgave 4

Avgjør om følgende rekker er konvergente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

Løsning: Vi bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-(n+1)}}{n^2 e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 e^{-1}}{n^2} = e^{-1}.$$

Da $e^{-1} < 1$ gir forholdstesten at rekken er konvergent.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\sin(1/n^2)$

Løsning: Vi bruker grensesammenligningstesten mhp. den konvergente rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sin(1/n^2) \Big/ \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} = 1,$$

som viser at rekken er konvergent.

Oppgave 5

(a) Finn et enkelt uttrykk for summen av potensrekken

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$$

på sitt konvergensintervall.

Løsning: Vi kan bruke forholdstesten til å bestemme konvergensintervallet:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+1)|x|^{n+1}}{(2n+1)|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)|x|}{2n+1} = |x|,$$

som viser at rekken er konvergent for $|x| < 1$ og divergent for $|x| > 1$. For $x = \pm 1$ vil leddene i rekken ikke konvergere mot 0, så rekken er divergent i disse punktene. Vi konkluderer at rekken har konvergensintervall $(-1, 1)$.

For å bestemme summen bruker vi de kjente rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ og $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1/(1-x)^2$ (der den siste rekken fremkommer ved å derivere den første rekken leddvis). Dette gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

(b) Finn Maclaurinrekken for funksjonen $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-2t^2}\, dt$.

Løsning: Vi bruker den kjente rekken $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ og integrerer leddvis:

$$\int_0^x e^{-2t^2}\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{n!}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}.$$

Oppgave 6

Avgjør om funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{når } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

er kontinuerlig i $(0,0)$. Svaret skal begrunnes.
Løsning: Funksjonen er kontinuerlig i $(0,0)$ med verdien 0 hvis og kun hvis

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Vi vet at dersom grensen eksisterer er grensen den samme for hver kurve gjennom $(0,0)$. På linjen $x = 0$ har vi grensen $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$, mens vi på linjen $x = y$ har grensen $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$. Vi konkluderer at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 7

La f være funksjonen på $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9\}$ gitt ved

$$f(x,y,z) = xyz.$$

(a) Begrunn hvorfor f har globale maksimums- og minimumsverdier på D.

Løsning: Da D er nivåflaten til en kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}^3$ er D en lukket delmengde av $\mathbb{R}^3$. Hvis (x,y,z) er et punkt i D er $|x| \le 3$, $|y| \le 3$ og $|z| \le 3$, slik at D også er en begrenset delmengde av $\mathbb{R}^3$. Et teorem sier at en kontinuerlig funksjon på en lukket og begrenset delmengde av $\mathbb{R}^3$ har globale maksimums- og minimumsverdier.

(b) Finn maksimums- og minimumsverdien til f på D.

(*Hint:* La $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 9$ og bruk Lagranges metode).

Løsning: Vi vet at dersom $f(x,y,z)$ er en ekstremalverdi for f på D, da finnes det et reelt tall λ slik at (x,y,z,λ) er et kritisk punkt for Lagrange funksjonen gitt ved

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 9).$$

De kritiske punktene for Lagrange funksjonen er gitt som løsningene til ligningene

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda) = yz + \lambda 2x \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda) = xz + \lambda 4y \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda) = xy + \lambda 8z \\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 9.
\end{aligned}$$

Dert er klart ut fra definisjonen av f at dersom $f(x, y, z)$ er en global ekstremalverdi, da er $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Vi kan derfor isolere λ som gir ligningene

$$\frac{yz}{2x} = \frac{xz}{4y} \Rightarrow x^2 = 2y^2 \quad \text{og} \quad \frac{yz}{2x} = \frac{xy}{8z} \Rightarrow x^2 = 4z^2.$$

Nå bruker vi betingelsen for $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda)$ til å finne x:

$$9 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

De kritiske punkter er derfor på formen $(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Vi setter inn i uttrykket for f og finner maksimumsverdien $3\sqrt{6}/4$ og minimumsverdien $-3\sqrt{6}/4$.

Oppgave 8

Avgjør om funksjonen $f(x) = x^2 e^{-x}$ er uniformt kontinuerlig på intervallet $[0, \infty)$. (Du kan gjerne henvise til resultater om uniform kontinuitet fra pensum.)

Løsning: Et resultat fra pensum sier at dersom den deriverte f' er begrenset på $[0, \infty)$ er f uniformt kontinuerlig på dette intervallet. Vi har at

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x}$$

som viser at $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Da f' er kontinuerlig på $[0, \infty)$ og $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ kan vi konkludere at f' er begrenset på dette intervallet. (Vi kan si dette mere formelt ved å velge $N > 0$ slik at $|f'(x)| \leq 1$ når $x \geq N$. Da f' er kontinuerlig er f' også begrenset på det lukkede begrensete intervallet $[0, N]$, så det følger at f' er begrenset på hele intervallet $[0, \infty)$.)

Oppgave 9

(a) La f være en begrenset funksjon på intervallet $[0, 1]$. Gi definisjonen av øvre og nedre Riemannsum, $U(f, P)$ og $L(f, P)$, der P er en partisjon av intervallet. Hva vil det si at f er Riemann-integrerbar?

Løsning: Gitt en partisjon P: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, er

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{og} \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

der $m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ og $M_i = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

La I^* være infimum av mengden av øvre Riemann summer $U(f, P)$, der P er en vilkårlig partisjon av $[0, 1]$, og la tilsvarende I_* være supremum av mengden av nedre Riemann summer $L(f, P)$, der P igjen er en vilkårlig partisjon av $[0, 1]$. Generelt er $I_* \le I^*$ og vi sier at f er Riemann-integrerbar dersom $I_* = I^*$. (Alternativt kan dette uttrykkes på følgende måte: En begrenset funksjon f på $[0, 1]$ er Riemann-integrerbar dersom det for ethvert $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av $[0, 1]$ slik at $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.)

(b) Anta nå at f er en kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$. Vis at dersom

$$\int_0^1 |f(x)|\, dx = 0,$$

da er $f(x) = 0$ for alle x.

(Du kan bruke at en kontinuerlig funksjon på $[0, 1]$ er Riemann-integrerbar).

Løsning: La g være funksjonen $g(x) = |f(x)|$ på $[0, 1]$. Vi må vise at dersom $\int_0^1 g(x)\, dx = 0$ er $g(x) = 0$ for alle x. Anta motsetningsvis at det finnes x_0 slik at $g(x_0) > 0$. Da g er kontinuerlig kan vi uten innskrenkning anta at $0 < x_0 < 1$. Da følger det fra kontinuiteten av g at vi kan velge a og b slik at $0 < a < x_0 < b < 1$ og $g(x) \ge g(x_0)/2$ for alle $x \in [a, b]$. La P være partisjonen $P\colon 0 < a < b < 1$ av intervallet $[0, 1]$. Da $g(x) \ge 0$ for alle x følger det ut fra definisjonen av $L(g, P)$ at

$$\int_0^1 g(x)\, dx \ge L(g, P) \ge \tfrac{1}{2} g(x_0)(b - a) > 0,$$

hvilket er en motstrid. Derfor må altså $g(x) = 0$ for alle x.

Lykke til!

Christian Schlichtkrull