# Prøveeksamen MAT121 V22

**Oppgave 1.** La

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 4 \\ 8 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Kryss av for de korrekte utsagnene om disse matrisene. Velg ett eller flere alternativer:

☐ $A$ er symmetrisk
☐ $B$ er symmetrisk
☐ $C$ er symmetrisk
☐ $D$ er symmetrisk
☐ $E$ er symmetrisk
☐ $D^T D$ er symmetrisk

**Oppgave 2.** Vi betrakter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + (k-1)x_2 &= 1 \\ 8x_1 + k^2 x_2 &= 5, \end{aligned}$$

der $k$ er et reelt tall. For hvilke verdier av $k$ er systemet inkonsistent? Velg ett alternativ:

☐ ingen $k$
☐ $k = 1$
☐ $k = -1$
☐ alle $k$
☐ $k = 2$
☐ $k = 0$

**Oppgave 3.** La $A, B, C$ være $3 \times 3$-matriser med

$$\det(A) = -1, \quad \det(B) = 48 \quad \text{og} \quad \det(C) = 2.$$

Hva er verdien av $\det(AB(2C)^{-1}A)$? Velg ett alternativ:

☐ ingen av de andre alternativene
☐ 3
☐ 12
☐ $-48$
☐ 32
☐ $\frac{3}{4}$

**Oppgave 4.** Vi betrakter ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 11 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Hvilket av følgende utsagn er USANT? Velg ett alternativ:

- ☐ Systemet er konsistent.
- ☐ Systemet har uendelig mange løsninger.
- ☐ Løsningsmengden er et underrom av $\mathbb{R}^4$.
- ☐ $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 2, 0, 0)$ er en løsning.
- ☐ Alle løsningene er på formen $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1 - 5s, 2 + s, s, 0)$, der $s \in \mathbb{R}$.

**Oppgave 5.** Vektoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en egenvektor for matrisen $A = \begin{bmatrix} -7 & 24 & -16 \\ -2 & 7 & -4 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$.

Hva er den tilsvarende egenverdien? Velg ett alternativ:

- ☐ $-7$
- ☐ 7
- ☐ 5
- ☐ 3
- ☐ $-1$
- ☐ ingen av de andre alternativene

**Oppgave 6.** La $A$ være en $15 \times 20$-matrise slik at løsningsrommet til $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har en basis med 8 vektorer. Hva er da dimensjonen til $\mathrm{Col}(A)$ (søylerommet til $A$)? Velg ett alternativ:

- ☐ 8
- ☐ 12
- ☐ 15
- ☐ 20
- ☐ 7
- ☐ ingen av de andre alternativene

**Oppgave 7.** La $A$ være en $2 \times 3$-matrise, og la $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Hvilket av følgende utsagn er USANT? Velg ett alternativ:

- ☐ Løsningsmengden til ligningen $A\mathbf{x} = 0$ kan være en linje i $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Løsningsmengden til ligningen $A\mathbf{x} = 0$ kan være et plan $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Løsningsmengden til ligningen $A\mathbf{x} = 0$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$.
- ☐ Ligningen $A\mathbf{x} = 0$ har uendelig mange løsninger.
- ☐ Radrommet til $A$ kan ha en basis bestående av 3 vektorer.

**Oppgave 8.** La $H$ være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $H$? Velg ett alternativ:

☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ ingen av de andre alternativene

**Oppgave 9.** La $A$ være en $3\times3$-matrise. Hvilken av følgende betingelser impliserer IKKE at $A$ er inverterbar? Velg ett alternativ:

☐ $A^T$ er inverterbar.
☐ Det finnes et positivt heltall $k$ slik at $\det(A^k) \neq 0$.
☐ Det finnes en $3 \times 3$-matrise $B$ slik at $AB = I$.
☐ Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent for enhver $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
☐ Det finnes lineært uavhengige $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ slik at $A\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ for hver $i$.

**Oppgave 10.** La $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ være basiser for et vektorrom $V$. Anta at

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_3 = 4\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3.$$

La videre

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3.$$

Variabelskiftematrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}}$ fra $\mathcal{A}$ til $\mathcal{B}$, og koordinatvektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, er da gitt ved (velg ett alternativ)

☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐ $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}{\mathcal{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$

☐ ingen av de andre alternativene

**Oppgave 11.** La $W$ være planet i $\mathbb{R}^3$ gitt ved ligningen $x_1 = x_2 + x_3$. La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Hvilken av følgende vektorer er den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ på $W$? Velg ett alternativ:

- ☐ $\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$
- ☐ Ingen av de andre alternativene.

**Oppgave 12.** La $\mathbb{P}_1$ være vektorrommet av førstegradspolynomer. La $T\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ være den lineære avbildningen definert ved

$$T(1) = 1 + kt \quad \text{og} \quad T(t) = 2 - t,$$

der $k$ er et reelt tall. For hvilken verdi av $k$ er $\lambda = 2$ en egenverdi for $T$? Velg ett alternativ:

- ☐ ingen $k$
- ☐ $k = 1$
- ☐ $k = -1$
- ☐ alle $k$
- ☐ $k = -\frac{1}{2}$
- ☐ $k = \frac{3}{2}$

Langsvaroppgaver (svar må begrunnes og mellomregninger vises):

**Oppgave 13.** La $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Det oppgis at $\lambda = 1$ er en egenverdi for $A$. Finn en basis for det tilsvarende egenrommet.

(b) Bestem maksimumsverdien $M$ av den kvadratiske formen

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

under føringen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Finn videre et punkt $(x_1, x_2, x_3)$ der denne maksimumsverdien antas.

**Oppgave 14.** Anta at $V, W$ er vektorrom, $T\colon V \to W$ er en lineær avbildning og $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$. Hvis $T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)$ er lineært uavhengige, må da $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ være lineært uavhengige? Svaret må begrunnes (bevis eller moteksempel).