MAT212 vår 2022

Fasit til eksamensoppgaven

1. <u>Inverse funksjon teorem og tangent plan</u>

Her kan vi skrive $F(x, y, \mathrm{z}) = e^{x+y} + e^{x+z} + \ e^{y+z} = 3$.

i. $F(0,0,0) = 1 + 1 + 1 = 3$, tilfredsstiller ligningen i punktet.
ii. Partiell derivertene eksister og er kontinuerlige,
$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(0,0,0)} \neq 0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0,0,0)} \neq 0$ og $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} \neq 0$

Dermed følger at vi kan skrive x som funksjon av $y\ og\ z$, y som $y(x, z)$ og z som $z(x, y)$.

Tangentplan kan vi finne ved (som er også 1. ordens Taylor polynom til $z(x, y)$),

$$P_1(x, y) = z(x, y)|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} (x - 0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} (y - 0) = -x - y$$

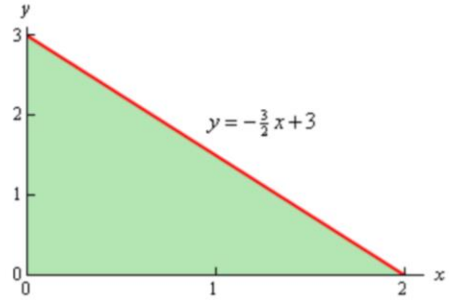
Siden partiell derivertene er gitt ved,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(0,0,0)} = -1 \ \text{ og } \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_{(0,0,0)} = -1.$$

Ligningen for tangentplanet er da, $z + x + y \ = \ 0$ som er uavhengig av hvis man finner linjer approksimasjon for $x(y, z)$, $y(x, z)$), eller $z(x, y)$ i punktet. Linjer approksimasjon for funksjon $f(x, y, z) = e^{x+y} + e^{x+z} + e^{y+z} - 3$ i punktet skal også gi samme ligning.

2. <u>Areal av en flate</u>

Planet kan vi skrive som $z = g(x, y) = 6 - 3x - 2y$ og til å finne arealet av flaten i første oktant kan vi finne $S = \iint_D \sqrt{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1\right)} dxdy$, hvor *D* er definisjonsområdet for flaten i *xy* planet. Til å finne definisjonsområdet må vi finne grenser til *x* og *y* når $6 - 3x - 2y \geq 0$. Ved å sette $z = 0$ får vi ligning for $y = 3 - \frac{3}{2}x$, og med andre ord, $0 \ \leq y \leq -\frac{3}{2}x + 3$ og $0 \ \leq x \leq 2$. Området ser ut som på bilde 1 nedenfor.



Bilde 1: Viser funksjonsområdet av z(x,y) i xy planet [1].

$\frac{\partial g}{\partial x} = -3$ og $\frac{\partial g}{\partial y} = -2$ og $S = \iint_D \sqrt{\left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1\right)}\, dxdy = \iint_D \sqrt{14}\, dxdy.$

$$S = \int_0^2 \int_0^{-\frac{3}{2}x+3} \sqrt{14}\, dydx = 3\sqrt{14}\,.$$

3. Stifunksjon, kurver og lengden av glatte kurver

   1. Sant
      En kurve defineres av en sti og en glatt kurve må ha tangentvektor, $\mathbf{r}'(t)$, som endrer retning kontinuerlige. Hvis komponentene av $\mathbf{r}'(t)$ er kontinuerlige betyr det at $\mathbf{r}(t)$ er en gang kontinuerlig, dvs. C^1.
   2. Sant Det bestemte integral L er uavhengig av parametriseringen, dvs. stien $\mathbf{r}(t)$.
   3. Nei $\mathbf{y}'(t)$ eksister ikke når $t \to 0$, da følger at L eksister ikke heller.
   4. Nei $\mathbf{r}(t)$ er ikke C^1 siden komponentene av $\mathbf{r}'(t)$ er ikke kontinuerlige.

4. Grafer i rommet

Ligning 1	Bilde IV
Ligning 2	Bilde II
Ligning 3	Bilde I
Ligning 4	Bilde III

5. Areal innelukket av lukket kurve

   1. Parametrisering (1) er i polarkoordinater og arealet kan vi finne ved,
   $$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2a(1-\cos\theta)} \mathrm{r}\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{2a(1-\cos\theta)} d\theta = 6\pi \mathrm{a}^2$$
   2. Ved bruker av Greens teorem for vektorfeltet, $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y\mathbf{i} + x\boldsymbol{j})$,
   $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \mathrm{F}_1\, \mathrm{dx} + \mathrm{F}_2\, \mathrm{dy} = \iint_D \left(\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y}\right) \mathrm{dA}.$$
   Siden $\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y} = 1$ for dette vektorfeltet, er $\iint_D \left(\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y}\right) \mathrm{dA} = areal(D)$ og vi kan finne
   $$A = areal(D) = \int_C \mathrm{F}_1\, \mathrm{dx} + \mathrm{F}_2\, dy = \frac{1}{2}\int_C -y\, \mathrm{dx} + x\, dy\,.$$
   Ved parametrisering (2),
   $$\mathrm{x}(t) = 2a\cos t\,(1-\cos t) \quad \text{og} \quad d\mathrm{x}(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t)\,,$$
   $$y(t) = 2a\sin t\,(1-\cos t) \quad \text{og} \quad d\mathrm{y}(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)\,,$$
   kan vi sette opp linjeintegralet,
   $$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [x(t)dy(t) - y(t)dx(t)]\, dt\,.$$

6. <u>Gauss teorem til å finne volum</u>

Steg 1: Divergensteoremet (Gauss) for et vektorfelt $\mathbf{F}$, sånt at $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1$**,**

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_{\Omega} 1\, dV = \ volum(\Omega).$$

Vi kan bruke $\mathbf{F} = \frac{1}{3}(x, y, z)$ og vi har at,

$$V = volum(\Omega) = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S\prime} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}'\, dS\ + \iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Hvor *S'* er overflaten til kjeglen som ikke er del av *S*, dvs. sidene av kjeglen.

På S' har vi at $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = 0$ og på S har vi at $\mathbf{N} = (0,0,1)$ og $\mathrm{z} = h$, sånt at,

$$V = 0 + \iint_{S} \frac{1}{3} h\, dS = \frac{1}{3} h \iint_{S} 1\, dS = \frac{1}{3} h\ areal(S),$$

dvs. $V\ = \frac{1}{3} hA$ som vi skulle vise.

Steg 2: Så lenge som volumet er bunnet av stykkevis glatte flater så spiller det ingen rolle formet av bunnen siden vi får $\iint_{S} 1\, dS = areal(S) = A$ i siste steg av utregningene.

7. <u>Divergens og kurl til et vektorfelt</u>

Vektorfeltet har divergens og kurl: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2}$ og $\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\right]$.

1. Når z=0 er vektorfeltet F likt G=(-y,x) og feltlinjene er sirkler med radius i origo. Vi kan evt. si at vektorpilene er tangenter på sirklene, størrelsen av pilene øker med økt radius, og feltet «snur» i motsett retning til klokka. *Her er det litt fleksibelt med svar, men det skal inneholde noe som viser kunnskap av feltlinjer.*
2. F er ikke konservativt siden kurlet er ikke lik null ($\nabla \times \mathbf{F}\ \neq 0$) som er nødvendig betingelse.
3. G er inkompressibel siden divergensen er lik null ($\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$) men F er det ikke siden divergensen er ikke lik null ($\nabla \cdot \mathbf{F}\ \neq 0$)**.**

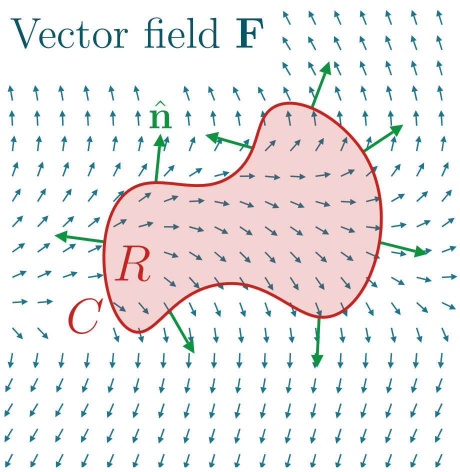
8. Divergensteorem i 2D

Steg 1: Divergensteoremet i 3D: $\iiint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, d\boldsymbol{S}$, for et volum, Ω, innelukket av stykkevis glatte flate, $\partial\Omega$, og peker $\mathbf{N}$ ut av flaten.

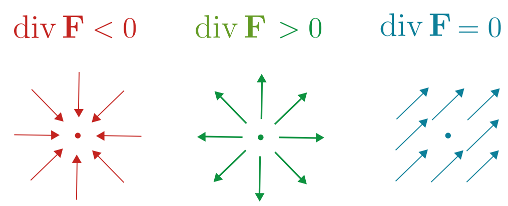
Divergensteoremet i 2D: $\iint_\mathrm{R} \nabla \cdot \mathbf{F}\, d\boldsymbol{A} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\; d\mathbf{r}$, for et område, R, innelukket av stikkevis glatte kurve, C, og $\mathbf{n}$ som peker utover kurven som vist på bilde 2.

Steg 2: Teoremet i 2D måler divergens av et vektorfelt i 2D. Hvis vi tenker om vektorfeltet som væskestrøm kan vi tenke os å hvis det strømmer væske ut av området gjennom C (det er høgre side i ligningen) resulter dette i minkende mengde av væske innhold av området R, væske divergerer fra R (det er venstre side). Omvend, hvis det strømmer væske inn, øker mengde av væske innhold av området, væske divergerer til R. Høgre side i ligningen er fluks over grensen og venstre side er divergens over hele området (flukstettheten). *Her er det flere enn en versjon av riktig svar. Skulle inneholde noe om å ligningene knitter sammen divergens og fluks (strøm) av et vektorfelt innenfor/ut av (et) området (område). Her kan du også forklare teoremet i 3D (f.eks. hvis ikke du fikk til steg 1).*

Steg 3: I tilfelle div F < 0 (divergens til pkt.), da øker strømtettheten innenfor R (det er mindre plass mellom vektorpilene på bilde 3) og det strømmer væske innom C. I tilfelle div F > 0 (divergens fra pkt.) da minker strømtettheten innenfor R, det strømmer væske utover C. I tilfelle div F = 0 (divergensfri) er akkurat ingen endring i strømtettheten, det er like mye som strømmer ut og inn. *Her er det også litt fleksibelt med svar, vis å du prøver å forstå (undersøke) hva skjer ved økende/minkende divergens. Som i steg 2 holder det å forklare teoremet i 3D.*



Bilde 2: Vektorfelt i 2D, området R, randkurven C og utvisende enhetsnormalvektor ***n*** *[2].*



Bilde 3: Divergens til et vektorfelt i 2D [2].

9. Inverse-funksjonsteorem

1. Usant Til a *definere u,v* som *funksjoner av x,y,x* må gitt Jakobi-determinant være ulik 0.

2. Sant For skalarfunksjoner får vi den betingelse.

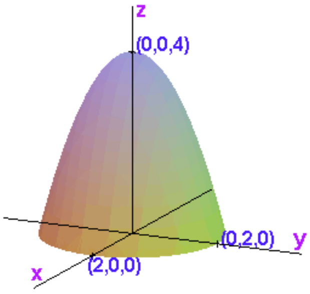
3. Sant

4. Sant
Til å definere *u,v* som funksjoner av *x,y* må vi ha $u^2 \neq v^2$, dvs. $u \neq \pm v$, sett inn i ligningene for *x* og *y* gir betingelsen for (x, y).

5. Usant
Med implisitt derivasjon av ligningene i (4) kan vi vise at det holder ikke. Generelt, når det gjelder vektorfunksjoner av flere variabler, tar Jakobi-determinanten rollen til deriverten.

10. Stokes teorem

A) Vi skal finne $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ for de to flatene S_1 og S_2. Første flaten ser ut sånt den på bilden og har projeksjon i *xy* planet som er sirkel med radius 2. Den andre flaten er en sirkel i *xy* planet med radius 2. Vi skal vise at $\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S}$. I oppgave 7 hadde vi allerede funnet at $\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2\right]$.



a. Siden $\mathbf{N}_2 = \mathbf{k}$ har vi at,

$$\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 d\boldsymbol{S} = \mathbf{2} \iint_{S_2} 1\, d\boldsymbol{S} = 2\, areal(S_2) = 8\pi$$

b. Vi kan beskrive S_1 som nivåflaten $G(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ og $\mathbf{N}_1 = \frac{\nabla G}{G_3}$ hvor $\nabla G = (G_3, G_3, G_3) = (2x, 2y, 1)$ og vi har,

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, d\boldsymbol{S} = \mathbf{2} \iint_{S_2} 1\, d\boldsymbol{S} = 2\, areal(S_2) = 8\pi$$

B) Følgende Stokes teorem, $\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, kan vi enten regne ut linjeintegralet til randen av S_1 eller flateintegralet over S_2 istedenfor flateintegralet over S_1 siden flatene har felles rand. Da har vi enten linjeintegral langs en sirkel eller flateintegral over sirkelen som i begge tilfelle regnets ut på enklere måte en flateintegralet over S_1.

Sæunn Halldórsdóttir

Referanser

[1] "Calculus III - Surface Area." https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/SurfaceArea.aspx (accessed Feb. 21, 2022).
[2] "2D divergence theorem (article) | Khan Academy." https://www.khanacademy.org/_render (accessed Feb. 22, 2022).