MAT292–Temaer til oppgaver 2021

Krav til forkunnskaper for MAT292 er kursene MAT111, MAT112, MAT121, minst ett av MAT131/MAT211/MAT220, og minst ett av MAT212/STAT110. I tillegg har hvert enkelt prosjekt ytterligere krav/anbefalinger til forkunnskaper angitt ved kurs som bør være gjennomført eller som kan leses parallellt.

Contents

1 Geodesisk geometri i topologisk dataanalyse.

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT243.

Formålet med denne oppgaven er å studere flater i rommet med verktøy fra topologisk dataanalyse. Der finnes oppsett der det er mulig å gjøre geometri på slike flater slik som for eksempel sfærisk geometri og geometri på en torus (overflaten til en smultring.) Denne geometrien kan være litt mere komplisert enn geometrien i planet som vi er kjent med. I denne oppgaven vil du undersøke slik plangeometri og se hvordan topologiske verktøy kan brukes til å beskrive egenskaper til slike flater ut i fra en mengde av punkter i rommet.
Hva lærer du: Du lærer grunnleggende differensialgeometri og topologi. Spesielt lærer du om geometri til kurver og flater og du tilegner deg grunnleggende kompetanse innen topologisk dataanalyse. Sentrale tema i oppgaven blir persistent homologi og nerven til en overdekning.

References

[1] B. T. Fasy , R. Komendarczyk , S. Majhi and C. Wenk *On the reconstruction problem for geodesic subspaces in the Euclidean Space.* https://arxiv.org/pdf/1810.10144v1.pdf

2 Delaunay Trianguleringen

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT242 eller MAT243.
Delaunay trianguleringen er et kraftfullt verktøy som brukes i datamaskiner til å manipulere geometriske objekter. Den er også sentral innen visse grener av statistikk. Formålet med denne oppgaven er å undersøke hvordan delaunay trianguleringen kan brukes til å beregne det som kalles persistent homologi til en samling av punkter i planet. Faktisk er dette en mest effektive metoden til akkurat dette. Hvis antallet av punkter blir veldig stort kan det likevel bli problematisk å regne på dette. Hvis tiden tillater det vil du se på hva som kan gjøres ved dette problemet.

References

[1] H. Edelsbrunner *Alpha Shapes – a Survey* http://graphics.stanford.edu/courses/cs268-14-fall/Handouts/AlphaShapes/2010-B-01-AlphaShapes.pdf

[2] Wikipedia *Alpha shape* https://en.wikipedia.org/wiki/Alpha_shape

3 Nerven til en kategori.

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT242 eller MAT243. Det vil være en fordel å ha fulgt MAT244.
Nervekonstruksjonen: Vi oppfatter ofte to (topologiske) rom som like hvis det finnes en homeomorfi mellom dem, det vil si en kontinuerlig funksjon med kontinuerlig invers. I det følgende kalles to rom som homotopiteoretisk like hvis der finnes en homotopiekvivalens mellom dem. Et klassisk teorem (se for eksempel Hatcher 4.G.3) sier at under visse betingelser på en overdekning av et rom er dette rommet homotopiteoretisk lik et rom, kalt nerven til overdekningen, som er dannet ved å lime sammen basale byggesteiner (simplekser) på en måte som er bestemt av hvilke endelige snitt av mengder i overdekningen

som ikke er tomme. Dette er et eksempel på nerven til en kategori, nemlig kategorien gitt ved den partiell ordnede mengden av ikke-tomme snitt av mengder i overdekningen. Nerven til kategorier er en sentral konstruksjon i algebraisk topologi som har mange varianter og anvendelser.
Hva lærer du? Du lærer å bruke biologi–databaser og du lærer elementer av algebraisk topologi. Dessuten lærer du programmering og hvordan du kan beregne persistent homologi.

References

[1] *Wikipedia*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Protein\OT1\textendashprotein_interaction`

[2] *Wikipedia*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Abstract_simplicial_complex`

[3] *Wikipedia*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Persistent_homology`

[4] *Wikipedia*
`https://en.wikipedia.org/wiki/Topological_data_analysis`

4 Rask beregning av persistent homologi

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211–Analyse eller MAT–242–Topologi.

Beskrivelse: Målet med dette prosjektet er å sammenligne forskjellige metoder for beregning av persistent homologi for endelige metriske rom. Persistent homologi er et redskap til å finne struktur data. Hvis data for eksempel er gitt som en mengde av punkter i euklidsk rom, da gjør euklidsk avstand disse punktene til et endelig metrisk rom.
Der finnes forskjellige metoder til rask beregning av persistent homologi. De fleste av disse metodene gir ikke en presis beregning. De beregner en approksimasjon til persistent homologi. Godtas mere usikkerhet gjøres beregningen raskere. I denne oppgaven vil du først gjøre eksakt beregning av persistent homologi på små datasett, og deretter prøve ut raske tilnærmiger på større datasett. Hvis du er mest interessert i teori vil du kunne gå raskt frem til matematiske bevis for kompleksitet og nøyaktighet av utvalgte metoder. Er du derimot mest interessert i teknologi og anvendelser kan du gjøre denne oppgaven uten å lære deg så mye teori.

For å lære å bruke dataverktøy vil det være en stor fordel å være flere sammen om denne oppgaven.

References

[1] *Wikipedia*
https://en.wikipedia.org/wiki/Abstract_simplicial_complex

[2] *Wikipedia*
https://en.wikipedia.org/wiki/Persistent_homology

[3] *Wikipedia*
https://en.wikipedia.org/wiki/Topological_data_analysis

5 Minimale utspennende trær

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211–Analyse eller MAT–242–Topologi.

Beskrivelse: Målet med dette prosjektet er å bygge datastrukturer som kan brukes til klyngeanalyse. (Cluster analysis på engelsk.) Slik klyngeanalyse anvendes i maskinlæring til å løse oppgaver spennende fra automatisk oversettelse av tekst til gjenkjenning av personer på bilder. En spesielt nyttig slik datastruktur er det minimale utspennende treet til en graf. Til en gitt graf kan det finnes mange forskjellige minimale utspennende trær. Vanligvis har det ingen betydning hvilket minimalt utspennende tre som brukes i videre analyse. I dette prosjektet vil du se at metoder fra topologisk dataanalyse peker ut ett spesielt minimalt utspennende tre som kan brukes til å produsere spesielt interessante klynger (clustre). Prosjektet kan med fordel deles opp i to oppgaver som gjøres av to studenter samtidig. Den ene oppgaven er å produsere det spesielle minimale utspennende tre. Den andre oppgaven er gitt et minimalt utspennende tre å produsere klynger. Kunnskap i programmering er en forutsetning for denne oppgaven. Ellers er der ingen spesielle krav til forkunnskaper.

Referanser:

HDBSCAN

6 Hochschild–homologi

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT220–Algebra er helt nødvendig. Deler av MAT224–Kommutativ algebra, som kan tilegnes ved å lese kurset parallelt med prosjektet, er også nødvendig.

Beskrivelse: Homologi er et viktig verktøy i algebraisk topologi som forteller om et roms kvalitative egenskaper. Løst sagt forteller homologi hvor mange "hull" der er i et rom.
Hochschild homologi er en slags homologi for ringer som kan brukes til å lage homologiteori for noe som kalles ikke–kommutative rom. Kort fortalt er ethvert pent rom bestemt av den kommutative ringen av kontinuerlige reelle funksjoner på rommet. Hochschild homologi av denne ringen kan brukes til a beregne rommets homologi. En ikke–kommutativ ring som ligner på en ring av reelle funksjoner kalles noen ganger et ikke–kommutativt rom, og Fieldsmedaljevinneren Allan Connes har brukt Hochschildhomologi til å definere homologi for slike ikke–kommutative rom.
Dette prosjektet går ut på å først forstå Hochschildhomologi, og dernest beregne Hochschild-homologi av enkle kommutative ringer. Prosjektet avsluttes med å variere på definisjonen av Hochschildhomologi og gjenta beregningene for disse variasjonene. For eksempel beregninger av syklisk homologi.

Hva lærer du? Simplisielle metoder, Homologisk algebra.

References

[1] J-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

7 Nerven til en overdekning

Veileder: Morten Brun

Epost: morten.brun@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT242–Topologi eller MAT243–Mangfoldigheter.

Beskrivelse: Et klassisk teorem (se for eksempel [1, 4.G.3]) sier at under visse betingelser på en overdekning av et rom er dette rommet homotopiteoretisk lik et rom, kalt nerven til overdekningen, som er dannet ved å lime sammen basale byggesteiner (simplekser) på en måte som er bestemt av hvilke endelige snitt av mengder i overdekningen som ikke er tomme. Målet med denne oppgaven er å studere hvordan nerven til en overdekning kan være brukbar også når betingelsene til dette klassiske teoremet ikke er oppfylt. Spesielt vil vi se på en betingelse som sikrer at nerven til to forskjellige overdekninger er homotopiteoretisk like. Denne betingelsen er nyttig i beregning av persistent homologi, og denne anvendelsen kan tas med i oppgaven dersom det blir tid til det.

Hva lærer du? Du lærer grunnleggende kombinatoriske metoder i homotopiteori, som går under navnet simplisielle metoder med utgangspunkt i en enkel konstruksjon som har mange anvendelser.

References

[1] A. Hatcher *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

8 Diagonals and isovariant maps

Veileder: Bjørn Ian Dundas

Epost: `dundas@math.uib.no`

Forkunnskaper: MAT220, MAT242.

Beskrivelse: Diagonals are neat, but very fragile devices. In this project we will characterize what functions support diagonals. If X is a space (or set or group or ...) on which a group G acts we can talk about fixed points and orbits. The space of fixed points is the subspace $X^G \subseteq X$ of points $x \in X$ such that for all $g \in G$ we have that $gx - x$ and the space of orbits is the quotient set X_G of X under the equivalence relation that for all $g \in G$ and $x \in X$ the product gx is equivalent to x. For instance, if the group $G = \{1, -1\}$ acts by multiplication on the real line $X = \mathbb{R}$ we get that $X^G = \{0\}$ and $X_G \cong [0, \infty)$.

If Z is any space, the action of G on X gives a natural action of G on the set $fun(X, Z)$ of functions $f: X \to Z$ and the projection $X \to X_G$ induces a bijection

$$\Delta_X: fun(X_G, Z) \cong (fun(X, Z))^G.$$

Thus it is natural to identify the set of functions $f: X \to Z$ that are fixed under the G-action with the set of functions from the orbit space. The point of this project is that in interesting situations (when Z carries more structure) this identification is *not* natural – in a very precise sense.

Along the way we'll explore a concept - isovariance - which has other interesting consequences, for instance in connection with the Borsuk-Ulam theorem.

The project should end up with a precise classifications of all the situations where the diagonal *is* natural.

Hva lærer du?

You'll learn about group actions and what it means to be natural.

References

[1] Wikipedia "Group actions", "Equivariant map", "Diagonal functor" and "Representation theory"

[2] Nagasaki, Ikumitsu A survey of Borsuk-Ulam type theorems for isovariant maps. (English summary) Group actions and homogeneous spaces, 75–98, Fak. Mat. Fyziky Inform. Univ. Komenského, Bratislava, 2010.

9 Introduction to dynamical systems

Veileder: Arnaud Eychenne and Frederic Valet

Epost: arnaud.eychenne@uib.no ; frederic.valet@uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse
Beskrivelse: The second half of the 20th century saw the emergence of the discipline of nonlinear dynamical systems. Considering a (real) function, what is the behaviour of the iteratives of each point?
T This project delves in the behaviour of the points. Through the example of the quadratic map, we will study the dynamic of the different points, study the notion of chaotic systems (butterfly effect) and give the idea of bifurcation theory. In particular, we will prove the Sarkovskii theorem, which gives the existence of a certain periodic points.
This analysis focuses on the real case, and is based on the first chapter of the book of Devaney [1].

References

[1] Devaney, R., 2018. An introduction to chaotic dynamical systems. CRC Press.

10 Fourier series and Fourier transform applied to a diffusion equation

Veileder: Arnaud Eychenne and Frederic Valet

Epost: arnaud.eychenne@uib.no ; frederic.valet@uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse

Beskrivelse: We propose for this project to study the heat equation along a metal beam

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, & t \in (0,\infty), x \in [0,2\pi] \\ u(t,0) = u(t,2\pi), \forall t > 0, \\ u(0,x) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

To solve this problem we consider two cases. First, we will introduce the theory of Fourier series to tackle the case u_0 in $C^1([0,2\pi])$. Second, we will give an overview of the Fourier transform to deal with the case u_0 in $C^0([0,2\pi])$. In particular we will introduce the Poisson summation formula.
We will follow the book of Stein and Shakarchi: Fourier Analysis: An Introduction, Princeton Lecture in Analysis Book 1, (chapters 2, 4.4 and 5) [**?**].

References

[1] Stein, E.M. and Shakarchi, R., 2011. Fourier analysis: an introduction (Vol. 1). Princeton University Press.

11 Profunktorer i kombinatorikk og anvendt kategoriteori

Veileder: Gunnar Fløystad

Epost: Gunnar.Floystad@math.uib.no

Forkunnskaper: i. MAT220 Algebra, ii. Et av kursene MAT 242 Topologi eller MAT243 Mangfoldigheter, iii. MAT221 Diskret matematikk vil også være nyttig, men er ikke en forutsetning.

Beskrivelse: Kategoriteori er det felles moderne rammeverket for å beskrive den store variasjonen av matematiske strukturer som finnes. En kategori er rett og slett en samling av matematiske objekter sammen med avbildningene mellom dem.
En funktor er en transformasjon av objektene i en kategori til objekter i en annen kategori. En profunktor er en slags generalisert versjon av dette. Profunktorer viser seg å forekomme i så forskjellige områder som:

- Kombinatorikk, der det gir måter å transformere et *simplisielt kompleks* over til et annet. Simplisielle komplekser [4], er grafer (i dimensjon 1), trianguleringer av flater (i dimensjon 2), og høyere dimensjonale trianguleringer,
- Topologisk dataanalyse, der det beskriver generaliserte avstandsmål, [3].
- Modellering av hva man kan få til i systemer der hver komponent har en variasjon av funksjonalitet avhengig av hvilke ressurser som stilles til rådighet, [1], [2].

Oppgaven består av å sette seg inn i grunnleggende begreper og egenskaper rundt profunktorer, og så presentere deres anvendelse i settingene over. Vi vil legge størst vekt på situasjonen med simplisielle komplekser.

Hva lærer du: Anvendt kategoriteori, se [2], er et felt på solid opptur i de senere årene. Du får innblikk i hvordan dette grunnleggende rammeverket beskriver ikke bare den rene matematikken, men også modellerer et vell av anvendte situasjoner. Det er et felt som mer og mer griper om seg i å beskrive både matematikken og verden.

References

[1] A.Censi, *A mathematical theory of co-design*, arXiv:1512.08055 (2015).

[2] B.Fong, D.Spivak, *Applied category theory, seven sketches on compositionality*, Cambridge University Press, 2019.

[3] F.W.Lawvere *Metrics spaces, generalized logic and closed categories*, In: Rendiconti del seminario matématico e fisico di Milano 43.1 (1973), pp. 135–166.

[4] R.Stanley *Combinatorics and commutative algebra*, Birkhäuser, 2007.

12 Calculus of variation and optimal control theory

Veileder: Erlend Grong

,

Email: erlend.grong@uib.no

Prerequisites (taken earlier or in parallel): Needed: MAT131 Differential equations and MAT212 Functions of Several Variables.
Topics that might allow the students to write a more advanced thesis: MAT243 - Manifolds and MAT251- Classical mechanics.

Description: Several of the introductory calculus courses were focused on optimization; that is, finding first and second order conditions for when a point is a maximum or a minimum of a function. But how do you find the extremal solutions when the inputs are not points, but functions, such as curves? The theory of dealing with such problems is called calculus of variation. It can for example be used in classical mechanics, where we can find the path of a particle/ball/planet as the path minimizing the action functional.
In optimal control theory, the idea is to study problems where you have an influence, or control, over your curve, and you want to use this control in the best way possible. The latter usually means minimizing some sort of functional working on controls. Such problems appear in robotics and engineering, but the previous problems from classical mechanics can also be expressed in terms of optimal control.

The project will focus on learning calculus of variation in classical mechanics, considering both the Lagrangian and Hamiltonian point of view. We will then continue with control systems and questions of controllability. We will also learn tools for optimization, in particular the Pontryagin Maximum Principle.

References:

- Iver H. Breivik, *Klassisk Mekanikk*, (in Norwegian) `http://web.phys.ntnu.no/~stovneng/TEP4145_2007/klassisk_mekanikk.pdf`.
- Laurence C. Evans, *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory*, `https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf`.
- Daniel Liberzon, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*, Princeton University Press, 2012.
- V. I. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer 1989.
- Andrei A. Agrachev, Yuri Sachkov *Control Theory from the Geometric Viewpoint* 2004.

13 Integration, Hölder continuity and rough paths/Brownian motion

Veileder: Erlend Grong

,
Email: erlend.grong@uib.no

Prerequisites (taken earlier or in parallel): Needed: MAT212 Functions of Several Variables and MAT211 Real analysis.
Topics that might allow the students to write a more advanced thesis: MAT215 Measure theory.

Description: One of the great properties about continuous functions on the real line is that you can always integrate them. But if you want to integrate them along any path in $\mathbb{R}$ or $\mathbb{R}^n$ however, things become more complicated. If all functions and curves are smooth or at least differentiable then everything works well, but in general we do not know if the integral exists or not. Such questions of integrability are not purely academic question; if we have a differential equation with the influence of some random noise, then, even with a nice probability distribution chosen for this noise, we will still have paths that are not differentiable almost surely.
The topic of the Bachelor thesis is to first understand the nature of the problem of integration along continuous arbitrary paths. We will accomplish this by studying the Riemann-Stieljes integral and the theory of integration by Young. For the latter part, it will be

important to familiarize yourself with the concept of Hölder continuity and p-variation. The final part of the project is to look at the solutions of this problem. It involves either looking into the theory of Itô for integrating along a Brownian motion or looking at Lyon's theory of rough paths.

References:

- P. Fritz, N. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2012.
- B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer 2003.
- W. Rudin Principles in Mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976.
- P. Fritz, M. Hairer, *A Course on Rough Paths*, Springer 2014.

14 Lie groups and Lie algebras

Veiledere: Erlend Grong, Jonatan Stava

,
Email: erlend.grong@uib.no, jonatan.stava@uib.no

Prerequisites (taken earlier or in parallel): Needed: MAT121 Linear algebra and MAT131 Differential equations.
Topics that might allow the students to write a more advanced thesis: MAT220 Algebra and MAT243 - Manifolds.

Description: Unlike addition and multiplication of real and complex numbers, multiplication of matrices is not in general commutative. Furthermore, some of the most important subsets of matrices. such as invertible matrices and orthogonal matrices, are not determined by linear equations. So how does one then solve differential equations in such a non-linear spaces?
Nonlinear subsets of matrices that are preserved under multiplication is the inspiration of Lie groups, named after the Norwegian Mathematician Sophus Lie (1842-1899). The key property of Lie groups is theirs relationship to linear spaces called Lie algebras and the fact that many computations can be done in this linear space instead. In this sense, the Lie groups serve as a gentle introduction to curved spaces.

References:

- Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*, Springer 2015.
- John Stillwell, *Naive Lie theory*, Springer 2015.
- Frank W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer 1983.

- E.P. van den Ban, *Lie groups*, `https://webspace.science.uu.nl/~ban00101/lecnotes/lie2010.pdf`.

15 Wave breaking in undular bores

Veileder: Henrik Kalisch

Epost: Henrik.Kalisch@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT131-Differensialligninger, MAT212-Funksjoner av flere variable

Beskrivelse: A river bore is an upstream-propagating transition between different flow depths which is generally caused by tidal forces. Similar flows can also be realized in controlled environments such as wave flumes, and a number of studies have been conducted in order to understand some of the main features of bores. In particular, in Favre's work [2] a dedicated series of laboratory experiments is described which is aimed at classifying different types of bores.
In the relatively simple situation of a wave flume, one may without loss of generality assume that the upstream flow depth is the undisturbed depth, say h_0, and the incident depth is $a_0 + h_0$. Defining the bore strength by the ratio a_0/h_0, it was found in [2] that there are three main bore types. If the bore strength is below 0.28, the flow is laminar and oscillations of the free surface start to develop. Since in this case, none of the waves are breaking, this case is termed the purely undular bore.
If the ratio a_0/h_0 exceeds 0.28, then the leading wave behind the transition front starts to break, and while the flow still features oscillations, there is some turbulence associated with the breaking waves. If the ratio exceeds 0.75, a fully turbulent bore appears.
In this project, we will describe the undular bore using the shallow-water system and the KdV equation

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0. \tag{2}$$

We will also explore whether the ratio 0.28 can be found using some fairly simple wave models such as the KdV equation or a Boussinesq system [1]

References

[1] M. Bjørkavåg and H. Kalisch, *Wave breaking in Boussinesq models for undular bores* Phys. Lett. A **375** (2011), 1570–1578.

[2] H. Favre, *Ondes de Translation*, (Dunod, Paris, 1935).

16 Dispersive blow-up and freak waves

Veileder: Henrik Kalisch and Didier Pilod

Epost: Henrik.Kalisch@math.uib.no, Didier.Pilod@uib.no

Forkunnskaper: MAT131-Differensialligninger, MAT212-Funksjoner av flere variable, MAT234-Partielle differentialligninger

Beskrivelse: Freak waves are large waves that appear unexpectedly in a wave field of small significant waveheight. These waves pose a grave danger to all marine operations, and in particular ships crossing the ocean. Freak waves have been studied intensely over the last 20 years, and one mechanism for the formation of freak waves that has been proposed is dispersive focussing [2]. If a number of periodic waves are lined up in a particular manner, they may all come together at one point in space and time, and develop a very large amplitude. This phenomenon is well known in the theory of dispersive partial differential equations where it is called dispersive blow-up which can be understood at the linear level [1, 4] or at the non-linear level [3].
In this project, we will understand the linear blow-up in the KdV equation

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\eta\eta_x + \frac{1}{6}\eta_{xxx} = 0. \tag{3}$$

We will then construct an approximation to a freak wave using numerical tools such as Matlab or python.

References

[1] Bona, J.L. and Saut, J.C., 1993. *Dispersive blowup of solutions of generalized Korteweg-de Vries equations*, Journal of Differential Equations **103** pp.3-57.

[2] Kharif, C. and Pelinovsky, E., 2003. *Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon*, European Journal of Mechanics-B/Fluids **22** pp.603-634.

[3] Martel, Y. and Pilod, D., 2021. *Finite point blowup for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, arXiv preprint arXiv:2107.00268.

[4] Rauch, J. Partial differential equations. Graduate Texts in Mathematics, 128. Springer-Verlag, New York, 1991.

17 Butcher-series and Lie-Butcher series: structure and applications

Veileder: Adrien Laurent and Hans Z. Munthe-Kaas

Email: Adrien.Laurent@uib.no, Hans.Munthe-Kaas@uib.no
Prerequisites: Needed: ordinary differential equations (MAT131).
Additional related courses: differential geometry (MAT243) and numerical analysis (MAT260).
Description: In the 1960s, J. Butcher discovered a formalism of trees that simplifies greatly the computation of order conditions of Runge-Kutta methods for solving ordinary differential equations. In the past decades, this algebraic tool was studied and extended in a variety of contexts. In this project, we propose to study an extension of the Butcher series, called the Lie-Butcher series, that appears naturally when studying numerical integrators on Lie groups. Depending on the knowledge and on the interests of the student, the project can focus on the high-order integration in $\mathbb{R}^d$ and on Lie-groups, or on the study of the algebraic structure of B-series and LB-series.

References

[1] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration*, volume 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.

[2] A. Iserles, H. Z. Munthe-Kaas, S. P. Nørsett, and A. Zanna. Lie-group methods. In *Acta numerica, 2000*, volume 9 of *Acta Numer.*, pages 215–365. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[3] P. Chartier, E. Hairer, and G. Vilmart. Algebraic structures of B-series. *Found. Comput. Math.*, 10(4):407–427, 2010.

[4] K. Ebrahimi-Fard, A. Lundervold, and H. Z. Munthe-Kaas. On the Lie enveloping algebra of a post-Lie algebra. *J. Lie Theory*, 25(4):1139–1165, 2015.

18 Weak integration of stochastic differential equations

Veileder: Adrien Laurent and Hans Z. Munthe-Kaas

Email: Adrien.Laurent@uib.no, Hans.Munthe-Kaas@uib.no
Prerequisites: Needed: ordinary differential equations (MAT131).
Additional related courses: measure theory (MAT215) and numerical analysis (MAT260).

Description: Stochastic differential equations (SDEs) are used in a wide range of applications to model the evolution of systems subject to random perturbations. Depending on the quantity of interest, there are multiple ways to approximate the solution of a SDE. In this project, we will study the weak approximation, that is, the approximation of the law of the trajectories. After implementing and proving the convergence of the Euler-Maruyama method, we will study high-order weak approximations using Talay-Tubaro expansions.
Depending on the knowledge and on the interests of the student, we can focus on a numerical approach, or on the analysis and probability involved for proving the convergence, or even on the study of algebraic formalisms that are used to represent the terms in the Talay-Tubaro expansions. Ultimately, the goal is to define and study a general class of Runge-Kutta methods for the approximation of SDEs with multiplicative noise.

References

[1] TT D. Talay and L. Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stochastic Anal. Appl.*, 8(4):483–509 (1991), 1990.

[2] Evans L. C. Evans. *An introduction to stochastic differential equations.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[3] MT G. N. Milstein and M. V. Tretyakov. *Stochastic numerics for mathematical physics.* Scientific Computation. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[4] DR K. Debrabant and A. Rößler. Families of efficient second order Runge-Kutta methods for the weak approximation of Itô stochastic differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 59(3-4):582–594, 2009.

19 Fra kontinuitet til deriverbarhet

Veileder: Irina Markina

Epost: Irina.Markina@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse.

Beskrivelse: I det første kalkuluskurset lærer vi hva en kontinuerlig funksjon er, og hvorfor det er nyttig. I denne bacheloroppgaven skal vi lære at det er forskjellige nivåer av kontinuitet. Noen eksempler er Hölder- og Lipschitz-kontinuerlige funksjoner, uniformt og absolutt kontinuerlige funksjoner. Avhengig av graden av kontinuitet, vil vi se at noen av de kontinuerlige funksjonene ikke har noen deriverte i noe punkt, mens noen kontinuitetsbegrep garanterer eksistens av deriverte i nesten alle punkter. Hvis vi deriverer en funksjon og deretter tar den primitive, kan vi miste informasjon om den opprinnelige funksjonen. Hvor mye mister vi? Hvordan avhenger det av kontinuitetsegenskapene? Alle disse spørsmålene vil vi besvare i denne oppgaven.

References

[1] D.M. Bressoud. *A radical approach to Lebesgue's theory of integration.* Cambridge Univ Pr, 2008.

[2] Bernard R. Gelbaum and John M. H. Olmsted. *Counterexamples in analysis.* Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. Corrected reprint of the second (1965) edition.

[3] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

20 Rulling av en ball

Veileder: Irina Markina

Epost: Irina.Markina@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse, MAT212-Funksjoner av flere variabler.

Beskrivelse:
Prosjektet vil bestå av tre deler. I den første delen, skal vi beskrive den kinematiske fremgangsmåten for å rulle en 2-dimansjonal overflate over en annen overflate. Vi ser på overflatene som undermengder av et 3-dimesjonalt Euklidsk rom. Vi kan for eksempel se tilfellet der vi ruller en sfære over et plan. Ved å begrense denne prosessen med å ikke tillate gliding eller rotering, vil vi komme frem til de kinematiske ligningene som beskriver denne bevegelsen. I den neste delen, skal vi analysere rullende overflater fra et geometrisk perspektiv. Ved å kun se på overflatene og løsrive dem fra det 3-dimensjonale rommet de befinner seg i, vil vi skille mellom den klassiske fremgangsmåten og en "intrisisk" beskrivelse, som unngår komplikasjoner med de forskjellige måtene man kan realisere en overflate som en undermengde av et Euklidsk rom. Et av de viktigste spørsmålene dreier seg om kontrollbarhet: under hvilke betingelser for overflatene, kan enhver relative posisjon kan nås i konfigurasjonsrommet, uavhengig av startpunkt. Til slutt, hvis tiden tillater det, vil vi se på problemet om relatert til hvordan vi kan rulle optimalt fra et relativ posisjon til en annen.

References

[1] V.A.Toponogov *Differential Geometryof Curves and Surfaces. A Concise Guide.* Birkhäuser, 2006.

[2] A.M.Bloch *Nonholonomic Mechanics and Control.* Springer, 2003.

21 Geometrien til kurver i planet og i tredimensjonalt rom

Veileder: Irina Markina

Epost: Irina.Markina@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse.

Beskrivelse: Denne bacheloroppgaven inviterer deg til den spennende verdenen av differensialgeometri, som er en fin kombinasjon av topologi og analyse. Vi vil begynne med et svært enkelt objekt, en kurve i planet, og deretter se på kurver i tredimensjonalt rom. Vi vil studere hvordan man definerer en kurve riktig, hva det betyr å være glatt, og hva en kurves lengde, hastighet og krumning er. For en lukket kurve vil vi forstå forholdet mellom omkretsen og arealet begrenset av kurven. Noen av kurvene kan være veldig merkelige. De kan for eksempel være så lange at de dekker et positivt areal, men likevel holde seg innenfor et kvadrat i planet. På slutten vil vi lære hvordan egenskapene til en flate kan beskrives ved hjelp av egenskapene til kurver som ligger på denne flaten.

References

[1] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.

[2] V. A. Toponogov. *Differential geometry of curves and surfaces.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006. A concise guide, With the editorial assistance of Vladimir Y. Rovenski.

[3] John W. Rutter. *Geometry of curves.* Chapman & Hall/CRC Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.

22 Hvor mange forskjellige typer integraler finnes det?

Veileder: Irina Markina

Epost: Irina.Markina@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse. Det er en fordel å ha MAT215-Mål- og integralteori, men det er ikke nødvendig.

Beskrivelse: I kalkuluskurset lærer vi om Riemannintegralet, som er ganske nyttig, ikke vanskelig å konstruere, men ganske vanskelig å bruke i mer avansert matematikk. Man kan spørre om det finnes andre konstruksjoner av integraler og svaret er ”ja”. I denne bacheloroppgaven vil vi studere ulike konstruksjoner av integraler, som brukes i forskjellige områder av matematikken. Disse ulike begrepene om integraler kan også være nyttige i anvendt matematikk, sannsynlighetsteori, stokastisk analyse, finansmatematikk, fysikk og andre anvendelser.

References

[1] M. Carter and B. van Brunt. *The Lebesgue-Stieltjes integral.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000. A practical introduction.

[2] William O. Ray. *Real analysis.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[3] David M. Bressoud. *A radical approach to Lebesgue's theory of integration.* MAA Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

23 Geometrisk målteori

Veileder: Irina Markina

Epost: Irina.Markina@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse og MAT215-Mål- og integralteori.

Beskrivelse: Dette er en avansert oppgave for studenter på bachelornivå. Vi vil begynne med å repetere begrepet om et mål på en mengde. Stort sett vil vi være interessert i ytre mål, som forskjellige typer kapasiteter. Begrepet kapasitet er rent analytisk og kommer fra forsøk på å anslå størrelsen på mengder som er neglisjerbare for løsninger av partielle differensialligninger. På den annen side er dette nært knyttet til den såkalte Hausdorffdimensjonen til disse mengdene. Hausdorffmål er et interessant tema i seg selv. Vi vil se flere eksempler på mengder der dimensjonen er en brøk, og vi vil lære å derivere mål.

References

[1] J. Yeh. *Problems and proofs in real analysis.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014. Theory of measure and integration.

[2] Frank Morgan. *Geometric measure theory.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. A beginner's guide.

[3] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[4] Kenneth Falconer. *Techniques in fractal geometry.* John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

24 Hamiltonsk dynamikk; geometri og beregninger

Veileder: Hans Zanna Munthe-Kaas

Epost: hans.munthe-kaas@uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse, MAT212-Funksjoner av flere variable, MAT260-Beregningsalgoritmer II.

Beskrivelse: Hamiltonske systemer er typiske mekaniske systemer der energien er bevart, som bevegelsen til planetene i solsystemet eller en snurrebass som spinner. I denne oppgaven skal du se på grunnleggende teori for hamiltonske systemer, og prøve ut noen numeriske metoder for integrasjon av disse. Oppgaven kan enten gjøres som hovedsakelig numeriske eksperimenter, eller som en mer teoretisk oppgave der man går inn på mer av den vakre geometriske teorien som ligger bak geometrisk mekanikk. Om oppgaven legges i retning numerikk, er første referanse mest aktuelt, om det er mer geometri/teori er andre referanse den mest sentrale.

References

[1] J.M. Sanz-Serna, M.P. Calvo: "Numerical Hamiltonian Problems", Courier Dover Publications, Jun 13, 2018 .

[2] V.I. Arnold: "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer GTM 1997.

25 Compressed sensing

Veileder: Anna Oleynik and Henrik Kalisch

Epost: Anna.Oleynik@uib.no, Henrik.Kalisch@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT131-Differensialligninger, MAT212-Funksjoner av flere variable, MAT236-Fourier analyse hvis mulig

Beskrivelse: In signal processing, sampling is a process of converting a continuous time signal $s(t)$ into a sequence of values $\{s_n\}_{n=1}^N$. Examples of such signals are a sound wave, music or speech, electrocardiogram (ECG) and electroencephalographic (EEG).
An important question is however, when is a particular sampling useful? Or, in other words, how should one sample in order to reconstruct the original signal $s(t)$ from the given sequence?
We will start by looking at examples of failed and successful reconstruction, reviewing the famous Nyquist-Shannon sampling theorem and its implications. The main focus of the project, will be compressed sensing, a novel approach that allows for the effective reconstruction of a signal far below the Shannon–Nyquist sampling rate. This approach

is not universal, and is based on the assumption that a signal has a sparse representation in a certain domain. We will apply compressed sensing to different signals, using Matlab, Python, or any other programming language.
Wikipedia:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist%E2%80%93Shannon_sampling_theorem`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Compressed_sensing`

References

[1] Taghouti,M. 2020. Compressed sensing. In Computing in Communication Networks (pp. 197-215). Academic Press.

[2] Rani, M., Dhok, S.B. and Deshmukh, R.B., 2018. A systematic review of compressive sensing: Concepts, implementations and applications. IEEE Access, 6, pp.4875–4894.

26 Fourier series and the isoperimetric inequality in the plane

Veileder: Didier Jacques Francois Pilod

Epost: Didier.Pilod@uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse

Beskrivelse: After studying the mathematical theory of Fourier series of square integrable functions, we will see a nice application to the isoperimetric inequality in dimension 2. More precisely, we will prove that, among all simple closed curves of specified length in the plan, the circle is the one which encloses the largest possible area. The main ingredients in this proof are the Green theorem and the Parseval identity.
We will follow the book of Stein and Shakarchi: Fourier Analysis: An Introduction, Princeton Lecture in Analysis Book 1, (chapters 2, 3 and 4.1).
Note however that this proof was first given by Hurwitz in the article: "Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier", Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure" 19 (1902) 357–408.

27 Simulation of flow in porous media

Veileder: Florin Adrian Radu

Epost: Florin.Radu@math.uib.no

Forkunnskaper: MAT211-Reell analyse, MAT212-Funksjoner av flere variable, MAT260-Beregningsalgoritmer II.

Beskrivelse: We set up a mathematical model for saturated/unsaturated flow in porous media [1]. It will consists of a non-linear, partial differential equation, together with initial and boundary conditions. We will discretize the equation using different Euler schemes and finite volumes or finite differences. We will consider a simple linearization (L-scheme [2]). We implement the algorithm in Matlab (one dimensional) and simulate a realistic problem.

It is possible to have a few people working on this, comparing different discretization techniques.

References

[1] J.M. Nordbotten and M. Celia, *Geological Storage of CO2: Modeling Approaches for Large-Scale Simulation*, 2011, John Wiley and Sons, Inc.

[2] F. List and F.A. Radu, *A study on iterative methods for Richards' equation*, Comput. Geosci. 20 (2016), pp. 341-353.

28 Flag manifolds and cell complexes

Veileder: Christian Schlichtkrull

Epost: krull@math.uib.no

Prerequisites: MAT242 and MAT243

In topology and geometry, a *flag* in $\mathbb{R}^n$ is a sequence of proper subspaces $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset \mathbb{R}^n$. If we require that the subspace V_i has a fixed dimension n_i for $i = 1, \ldots, k$, then the set of all such flags can be given a canonical topology making it a (smooth) manifold. For instance, for $k = 1$ and $n_1 = 1$, this is the space of lines in $\mathbb{R}^n$ (also known as the real projective space $\mathbb{R}P^{n-1}$). There are analogous flag manifolds of complex vector spaces. Such flag manifolds are important for many geometric considerations.
In the analysis of flag manifolds it is useful to know that they are *cell complexes*, which means that they can be build by successively attaching disks of increasing dimensions. The goal of the project is to understand the manifold and cell structures of flag manifolds in detail and to derive some topological consequences.

References

[1] Moncef Ghazel, *On the Ehresmann cell structure for flag manifolds*, `arXiv`:1904.03967

[2] A. Hatcher, *Algebraic topology*, https://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf

29 Quasi-categories and simplicial sets

Veileder: Christian Schlichtkrull

Epost: krull@math.uib.no

Prerequisites: MAT220 and MAT242

In mathematical terminology, a *category* is given by a collection of objects and a collection of morphisms (or functions) between the objects. For instance, there is the category of sets and ordinary functions between sets, the category of vector spaces and linear transformations, and the category of topological spaces and continuous maps. It turns out that many concepts in mathematics can be expressed in category theoretical terms.
However, in situations where one is interested in a notion of "equivalence", it is sometimes useful to work within a more flexible structural framework such as the setting of *quasi-categories* developed by Joyal and Lurie. The goal of this project is to learn about categories and quasi-categories, and the relation between them. This involves getting familiar with the theory of simplicial sets which is in itself important for topology and geometry.

References

[1] G. Friedman, *An elementary illustrated introduction to simplicial sets*, `arXiv`:0809.4221

[2] T. Leinster, *Basic category theory*, `arXiv`:1612.09375

[3] A. Joyal, *Quasi-categories and Kan complexes*, Journal of Pure and Applied Algebra 175 (2202) 207–222.

30 Morse Theory: Understanding geometry through critical points of functions

Veileder: Gianmarco Vega-Molino

Epost: gianmarco.vega-molino@uib.no

Prerequisites: MAT212 Functions of Several Variables and MAT211 Real Analysis. Topics that might allow for a more advanced thesis: MAT243 Manifolds

Description In calculus courses, every student learns that the critical points of a function give information about the extreme values of its graph. Under appropriate conditions, it is possible to determine the local geometry of the curve (such as maxima, minima, and points of inflection) purely from knowledge of its derivative. This is then extended to the Hessian determinant for graphs of multivariable functions.
In the early 1900's, Marston Morse introduced his theory in which the geometry of much more general spaces (including curves and surfaces, but also differentiable manifolds) is studied by considering the critical values of functions defined on them. This project will study these ideas; we will begin with the classical Morse Lemma and build up to the famous Morse Inequalities which allow one to recover the Euler characteristic (a topological property) from almost any function defined on the space.

References

[1] Milnor, J. *Morse theory.* Annals of Mathematics Studies, No. 51 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963

[2] Banyaga, A.; Hurtubise, D. *Lectures on Morse homology.* Kluwer Texts in the Mathematical Sciences, 29. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2004.

31 The Gauss-Bonnet Theorem: A beautiful result at the intersection of analysis, topology, and geometry

Veileder: Gianmarco Vega-Molino

Epost: gianmarco.vega-molino@uib.no

Prerequisites Needed: MAT212 Functions of Several Variables and MAT211 Real Analysis Topics that might allow for a more advanced thesis: MAT243 Manifolds
Description It is possible to introduce to any surface a 'triangulation': a set of 'vertices' connected by 'edges' bounding 'faces' that cover the surface. In fact, for any given surface many such triangulations exist. Remarkably, if one computes the number of vertices, subtracts the number of edges, and adds the number of faces, the result is independent of the choice of triangulation. This is called the Euler characteristic of the surface; it serves as one way of characterizing surfaces.
During the 19th century, differential geometry was created from the study of surfaces that are sufficiently 'smooth' enough to allow the notion of the derivative to be well-defined. The notion is surprisingly extrinsic: on such a surface, many different notions of the derivative can actually be defined. However, it is possible to use the tools of differential geometry to study the underlying topology and geometry of the surface. The astonishing Gauss-Bonnet theorem states that when any notion of derivative is defined, one can compute the

Gaussian curvature of the surface, integrate it across the surface, and recover the Euler characteristic.
The purpose of this project is to follow a classical differential geometric approach to proving the Gauss-Bonnet theorem for a smooth surface in $\mathbb{R}^3$.

References

[1] Manfredo P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from Portuguese.

[2] Shifrin, Ted. "Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces." Unpublished course notes. https://math.franklin.uga.edu/sites/default/files/inline-files/ShifrinDiffGeo.pdf.