Eksamen i emnet MAT111/M100 - Grunnkurs i matematikk I

Mandag 15. desember 2003, kl. 09-13(15)

LØYSINGSFORSLAG

OPPGÅVE 1:

Finn dei deriverte til

$$i)\;\; f(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \exp(u^2)du, \;\; x \geq 1, \qquad ii)\;\; f(x) = x^{\cos(x)}.$$

<u>SVAR:</u>

$$i)\;\; \frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{x^2} \exp(u^2)du = 2x\exp(x^4) - \frac{1}{x}\exp((\ln x)^2) = 2x\exp(x^4) - x^{\ln x - 1}.$$

$$ii)\;\; f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}(\cos(x)\ln(x)) = x^{\cos(x)}(\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)).$$

OPPGÅVE 2:

Rekn ut dei ubestemte integrala

$$i)\;\; \int e^x \sin^{-1}(e^x)dx, \qquad ii)\;\; \int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx.$$

<u>SVAR:</u>

$i)$ La $u = e^x$ s.a. $du = e^x dx$:

$$\int e^x \sin^{-1}(e^x)dx = \int \sin^{-1}(u)du =$$
$$u\sin^{-1}(u) - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = u\sin^{-1}(u) + \sqrt{1-u^2} + C =$$
$$\underline{e^x\sin^{-1}(e^x) + \sqrt{1-e^{2x}} + C}.$$

$ii)$ Polynomdivisjon og delbrøkoppspalting gir:

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1 + \frac{1-x}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}.$$

Integrerer og får:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx = \int (1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x+1})dx = \underline{x + \ln\frac{|x|}{(x+1)^2} + C}.$$

OPPGÅVE 3:

Finst det konstantar α og β som gjer at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 0, \\ \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$$

blir kontinuerleg og deriverbar i $x = 0$?

SVAR:

Kontinuitet: $\lim_{x\to 0^-} \alpha x + \beta = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta = 0}$.
Men vi kan ikkje bestemme α s.a. funksjonen også er deriverbar fordi $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} 2\alpha x = 0$, $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$, og vi må kreve at $f'_-(0) = f'_+(0)$.

OPPGÅVE 4:

a) Finn volumet av omdreiingslekamen som er danna ved å rotere området avgrensa av $y = \sqrt{1/x^p}$, $y = 0$, $x = 1$ og $x = R > 1$ om x-aksen.

b) For kva verdier av p er volumet av omdreiingslekamen i a) avgrensa når $R \to +\infty$?

SVAR:

a) Volumet er gitt ved formelen

$$V(R) = \pi \int_1^R f(x)^2 dx = \pi \int_1^R \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p}(R^{1-p} - 1), & p \neq 1 \\ \pi \ln(R), & p = 1. \end{cases}$$

b) Når $p > 1$ konvergerer det ubestemte integralet slik at:

$$\lim_{R\to\infty} V(R) = \frac{\pi}{p-1}, \quad p > 1.$$

For $p \leq 1$ divergerer p-integralet mot ∞, og dermed er volumet ikkje avgrensa.

OPPGÅVE 5:

Avgjer om følgjande rekker konvergerer:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}, \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \frac{1}{(\sqrt{n^2+2n} - n)}.$$

SVAR:

$i)$ Dette er ei p-rekke med $p = 4/3 > 1$. Rekka er dermed konvergent.

$ii)$ Bruker grensesamanlikningstest med rekka i $i)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{n^2 + 2n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2n} + n}{2n} = 1,$$

som viser at rekka konvergerer.

OPPGÅVE 6:

For kva verdiar av x konvergerer rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

absolutt eller betinga, og for kva x-verdiar divergerer rekka?

SVAR:

For $|x| > 1$ eksisterer ikkje $\lim_{n\to\infty} a_n$ og rekka divergerer. Forholdstesten gir at

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|,$$

som viser at rekka konvergerer absolutt når $|x| < 1$. For $x = -1$ er rekka alternerande, og konvergerer betinga. For $x = 1$ ser vi at rekka divergerer ved samanlikning med den harmoniske rekka.

OPPGÅVE 7:

a) Finn den generelle løysinga til differensiallikninga

$$\frac{dy}{dt} + ky = t,$$

når k er konstant.

b) Kva blir det dominerande leddet til $y = y(t)$ funne i a), for $k < 0$, $k = 0$ og $k > 0$, når $t \to +\infty$?

SVAR:

a) Anta $k \neq 0$. 1. ordens lineær likning med integrerande faktor e^{kt}:

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}y) = te^{kt} \Leftrightarrow \underline{y(t) = \frac{t}{k} - \frac{1}{k^2} + Ce^{-kt}}$$

Anta $k = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = t \Leftrightarrow \underline{y(t) = \frac{1}{2}t^2 + C.}$$

b)

$$\begin{array}{llll}
k < 0,\ C \neq 0: & y(t) \sim Ce^{-kt}, & \text{eller} \quad y(t) = O(e^{-kt}), & t \to \infty, \\
k < 0,\ C = 0: & y(t) \sim \frac{t}{k}, & \text{eller} \quad y(t) = O(t), & t \to \infty, \\
k = 0: & y(t) \sim \frac{1}{2}t^2, & \text{eller} \quad y(t) = O(t^2), & t \to \infty, \\
k > 0: & y(t) \sim \frac{t}{k}, & \text{eller} \quad y(t) = O(t), & t \to \infty.
\end{array}$$

OPPGÅVE 8:

Avgjer om påstandane under er sanne eller usanne. Gi ei <u>kort</u> grunngjeving for svaret ditt.

a) Gitt at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, og at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer. Då konvergerer også rekka absolutt.

b) Kontinuerlege funksjonar definert på (a, b) har alltid eit maksimum og minimum på intervallet (a, b) dersom $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, $\lim_{x\to b-} f(x) = M$, og $|L|, |M| < \infty$.

c) Middelverdien av funksjonen $f(x) = xe^x$ på intervallet $[0, 1]$ er $\bar{f} = \sqrt{e}/2$.

<u>SVAR:</u>

a) <u>GALT</u>. Moteksempel: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$ konvergerer betinga (alternerande rekke), men ikkje absolutt (harmonisk rekke). Men ei absolutt konvergent rekke vil også konvergere.

b) <u>GALT</u>. Moteksempel: $f(x) = x$ har verken maksimum eller minimum på vilkårlige opne mengder. Men dersom det finns $x_0, x_1 \in (a, b)$ s.a. $f(x_0) < L, M$ og $f(x_1) > L, M$, har f alltid eit maksimum og minimum på intervallet (a, b).

c) <u>GALT</u>. Middelverdien til f på intervallet $[0, 1]$ er:

$$\bar{f} = \int_0^1 xe^x dx = xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1.$$

OPPGÅVE 9:

Vis ved induksjon at

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

<u>SVAR:</u>

1) For $n = 1$ gir formelen:

$$x = \sum_{k=1}^{1} x^k = \frac{x - x^{1+1}}{1 - x} = \frac{x(1 - x)}{1 - x}.$$

2) Anta formelen gjeld for $n = k - 1 > 1$:

$$\sum_{k=1}^{k-1} x^k = \frac{x - x^{k-1+1}}{1 - x}$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=1}^{k-1} x^k + x^k = \frac{x - x^k}{1 - x} + x^k$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=1}^{k} x^k = \frac{x - x^k + x^k(1 - x)}{1 - x} = \frac{x - x^{k+1}}{1 - x}$$

1) og 2) saman med matematisk induksjon gir at formelen gjeld for alle $n \geq 1$.

OPPGÅVE 10:

a) Finn Taylor-rekka om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

b) For kva verdiar av x vil Taylor-rekka i a) konvergere mot $f(x)$.

<u>SVAR:</u>

a) Vi ser at Taylor-rekka må vere den geometriske rekka gitt i forrige oppgåve i grensa når $n \to \infty$ og $x < 1$. Vi kan også finne rekka ved å bruke definisjonen. Vi ser lett at

$$f'(x) = (1-x)^{-2}, \;\; f''(x) = 2{\cdot}(1-x)^{-3}, \;\; f'''(x) = 2{\cdot}3{\cdot}(1-x)^{-4}, \ldots, f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)}, \ldots.$$

Formelen for den n-te deriverte kan vi eventuelt vise ved induksjon. Dette gir oss at

$$f(0) = 0, \;\; f^{(n)}(0) = n!, \;\; n > 0,$$

som innsatt i formelen for Taylor-rekka gir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

b) Forholdstesten gir oss at Taylor-rekka konvergerer absolutt når:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \underline{|x| < 1}.$$

Av utrykket i Oppgåve 9 ser vi at for $|x| < 1$ er

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{n+1}}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

TILLEGG M100 (2 timer ekstra)

OPPGÅVE 11:

La

$$z_1 = 1 + i, \;\; z_2 = -1 + i.$$

a) Rekn ut $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ og z_1/z_2.

b) Skriv z_1 på polar form og rekn ut z_1^4.

c) Finn alle dei komplekse løysingane til likninga

$$z^8 + 2z^4 + 1 = 0.$$

SVAR:

a)
$$z_1 + z_2 = 2i, \quad z_1 \cdot z_2 = -2, \quad z_1/z_2 = 1 - i.$$
b)
$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 2e^{i\pi} = -2.$$
c)
$$z^8 + 2z^4 + 1 = (z^4+1)^2 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow \underline{z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}}.$$

OPPGÅVE 12:

Løys initialverdiproblemet:
$$y^2\frac{dy}{dx} = y^3 - 3, \quad y(0) = 2.$$

SVAR:

Likninga er separabel og vi får:
$$\frac{y^2 dy}{y^3-3} = dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln(y^3-3) = x + C_1 \Leftrightarrow$$
$$y^3 - 3 = C\exp(3x) \Leftrightarrow \underline{y(x) = \sqrt[3]{C\exp(3x)+3}}.$$
Initialkravet gir
$$y(0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{C+3} = 2 \Leftrightarrow \underline{C = 5.}$$

OPPGÅVE 13:

La
$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$
a) Finn likninga for tangentplanet til flata $z = f(x,y)$ i punktet $(x,y) = (0,0)$.

b) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkt til f.

SVAR:

a) Tangentplanet:
$$z = 0$$
b) Kritisk punkt:
$$(x,y) = (0,0)$$
Klassifisering:
$$A = f_{xx}(0,0) = 2, \quad C = f_{yy}(0,0) = -2, \quad B = f_{xy}(0,0) = 1.$$
Origo er eit <u>sadelpunkt</u> fordi $-4 = AC < B^2 = 1$.