NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Deleksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i matematikk I

Fredag 24. oktober 2003, kl. 09-12

Tillatne hjelpemiddel: Lærebok og kalkulator.

OPPGÅVE 1:

Finn dei kritiske punkta til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3,$$

og avgjer absolutte (globale) minimums eller maksimumsverdiar til f på intervallet $[-3, 3)$.

OPPGÅVE 2:

Finn dei deriverte til

$$i)\ \ f(x) = \cos(\ln x), \quad ii)\ \ f(x) = \text{Arctan}(x^2 + 2).$$

OPPGÅVE 3:

Utrykk $\sin 3u$ ved $\cos u$ og $\sin u$.

OPPGÅVE 4:

Finn grenseverdiane

$$i)\ \ \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}, \quad ii)\ \ \lim_{x \to 2} \frac{\ln(3x - 5)}{x^2 - 4}.$$

OPPGÅVE 5:

Finn verdien til konstantane a og b som gjer at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 0, \\ \ln(x + 1), & x \geq 0, \end{cases}$$

blir kontinuerleg og deriverbar i $x = 0$.

OPPGÅVE 6:

Vis ved induksjon at den n-te deriverte til ln-funksjonen er gitt ved

$$\frac{d^n}{dx^n} \ln x = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

OPPGÅVE 7:

a) Gitt at $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ og $|f''(x)| < (x-3)^4$. Bruk dette til å finne ei best mogeleg tilnærming til $f(3.5)$.

b) Finn ei øvre grense for feilen i tilnærminga du har funne i a).

OPPGÅVE 8:

La $f(x) = \frac{x}{1-x}$ og la $g(x) = \frac{x}{1+x}$. Konstruer dei samansatte funksjonane

$$F(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) \quad \text{og} \quad G(x) = g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Kva seier dette om samanhengen mellom f og g?

OPPGÅVE 9:

Avgjer om påstandane under er sanne eller usanne. Gi ei kort grunngjeving for svaret ditt.

a) Kontinuerlege funksjonar på $[a, b]$ er alltid deriverbare på (a, b).

b) Funksjonar definert på $[a, b]$ har alltid eit absolutt (globalt) maksimum og minimum på intervallet.

c) Gitt at $f(x) = x^6 - x^5 - x^2 + 1$. Vi kan bruke middelverditeoremet på f til å vise at likninga $6c^5 - 5c^4 - 2c + 1 = 0$ har ei løysing (rot) i intervallet $(0, 1)$.

OPPGÅVE 10:

a) Vis ved polynomdivisjon at $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$.

b) Vis at $|x^2 + 3x + 9| < 37$ når $|x - 3| < 1$.

c) Bruk den formelle definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x \to 3} x^3 = 27.$$

Lykke til!

Helge K. Dahle, Stein A. Strømme