BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i matematikk I

Mandag 15. desember 2003, kl. 09-13

Tillatte hjelpemiddel: Lærebok og kalkulator.

OPPGAVE 1:

Finn de deriverte til

$$i)\ \ f(x) = \int_{\ln x}^{x^2} \exp(u^2)du, \quad x \geq 1, \qquad ii)\ \ f(x) = x^{\cos(x)}.$$

OPPGAVE 2:

Regn ut de ubestemte integralene

$$i)\ \ \int e^x \sin^{-1}(e^x)dx, \qquad ii)\ \ \int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx.$$

OPPGAVE 3:

Finnes det konstanter α og β som gjør at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 0, \\ \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$$

blir kontinuerlig og deriverbar i $x = 0$?

OPPGAVE 4:

a) Finn volumet av omdreiningslegemet som er dannet ved å rotere området avgrenset av $y = \sqrt{1/x^p}$, $y = 0$, $x = 1$ og $x = R > 1$ om x-aksen.

b) For hvilke verdier av p er volumet av omdreiningslegemet i a) avgrenset når $R \to +\infty$?

OPPGAVE 5:

Avgjør om følgende rekker konvergerer:

$$i)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}, \qquad ii)\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} \frac{1}{(\sqrt{n^2+2n}-n)}.$$

OPPGAVE 6:

For hvilke verdier av x konvergerer rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$$

absolutt eller betinget, og for hvilke x-verdier diveregerer rekken?

OPPGAVE 7:

a) Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{dy}{dt} + ky = t,$$

når k er konstant.

b) Hva blir det dominerende leddet til $y = y(t)$ funnet i a), for $k < 0$, $k = 0$ og $k > 0$, når $t \to +\infty$?

OPPGAVE 8:

Avgjør om påstandane under er sanne eller usanne. Gi en <u>kort</u> begrunnelse for svaret ditt.

a) Gitt at $\lim_{n\to 0} a_n = 0$, og at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverger. Da konvergerer også rekken absolutt.

b) Kontinuerlige funksjoner definert på (a, b) har alltid et maksimum og minimum på intervallet (a, b) dersom $\lim_{x\to a+} f(x) = L$, $\lim_{x\to b-} f(x) = M$, og $|L|, |M| < \infty$.

c) Middelverdien av funksjonen $f(x) = xe^x$ på intervallet $[0, 1]$ er $\bar{f} = \sqrt{e}/2$.

OPPGAVE 9:

Vis ved induksjon at

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

OPPGAVE 10:

a) Finn Taylor-rekken om $x = 0$ til funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

b) For hvilke verdier av x vil Taylor-rekken i a) konvergere mot $f(x)$.

Tom L. Lindstrøm, Helge K. Dahle, Stein A. Strømme