Bergen, oktober 11. 2004.

Løsningsforslag til

# Deleksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 11. oktober 2004, kl. 09-12.

## Oppgave 1

*Beregn grensen*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

*f.eks. ved hjelp av l'Hôpitals regel.*

Vi ser at både teller og nevner går mot null, og den deriverte til nevneren er forskjellig fra null, så betingelsene for å bruke l'Hopital's regel er (mer enn) oppfylt, såfremt utrykket vi kommer frem til eksisterer:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to 1}1/x=1/1=1.$$

## Oppgave 2

*I Postens prisliste finner vi maksimumsmålene for sending av en rull med Norgespakke: "Lengde inntil 240 cm, lengde + omkrets inntil 360 cm". Med rull forstås en sylinder med sirkulært tversnitt. Vi ønsker å sende en rull med størst mulig volum. Hva blir lengden?*

Kall lengden til sylinderen $h$ og radius $r$. Da har vi

$$V=h\cdot\pi r^2,\qquad h+2\pi r\le 360,\qquad 0\le h\le 240.$$

Det er klart at vi får størst volum om vi velger $h+2\pi r=360$ (volumet øker om vi øker radius), eller m.a.o.

$$r=\frac{360-h}{2\pi}.$$

Setter vi dette inn i uttrykket for volumet får vi

$$V(r)=h\cdot\pi\left(\frac{360-h}{2\pi}\right)^2=\frac{1}{4\pi}(360^2h-2\cdot 360h^2+h^3),\qquad h\in[0,240].$$

Vi har et optimeringsproblem på et lukket intervall. Maksimum vil finnes i et endepunkt, i et kritisk punkt eller i et singulært punkt. Det er ingen singulære punkter da funksjonen er derivérbar:

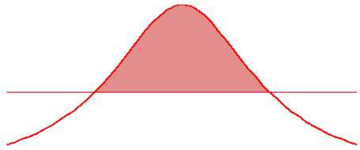
$$V'(r)=\frac{1}{4\pi}(360^2-4\cdot 360\cdot h+3h^2)=\frac{3}{4\pi}(h-120)(h-360).$$

Det eneste kritiske punktet i $[0,240]$ er 120.

Vi ser fra tabellen at $h = 120$ gir det største volumet:

| $r$ | 0 | 120 | 240 |
|---|---|---|---|
| $V(r)$ | 0 | $\frac{4}{\pi}120^3$ | $\frac{1}{2\pi}120^3$ |

# Oppgave 3



*Finn arealet av området under kurven*

$$y = \frac{2}{1+x^2}$$

*og over linjen* $y = 1$.

Finner skæringene mellom de to kurvene: $1 = \frac{2}{1+x^2}$ løses m.h.p.$x$ og gir $x = \pm 1$. Arealet blir

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \left( \frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx &= \left[ 2\tan^{-1}(x) - x \right]_{-1}^{1} \\ &= 2\tan^{-1}(1) - 1 - (2\tan^{-1}(-1) - (-1)) \\ &= \pi - 2.\end{aligned}$$

# Oppgave 4

*Finn den 25. deriverte til* $f(x) = x\,e^x$ *(bruk induksjon).*

Derivérer:

$$f'(x) = (1+x)e^x, \qquad f''(x) = (2+x)e^x, \qquad f(3)(x) = (3+x)e^x \qquad \ldots$$

og danner hypotesen

$$P(n) \qquad : \qquad \left( f^{(n)}(x) = (n+x)e^x \right)$$

Vi vet at $P(1)$ er sann og viser at $P(k)$ medfører $P(k+1)$ for alle naturlige tall $k$. Begynn på venstre siden av utsagnet $P(k+1)$ og vis (ved hjelp av $P(k)$, om nødvendig) at denne er lik høyre side av $P(k+1)$:

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx}\left( f^{(k)}(x) \right) = \frac{d}{dx}\left( (k+x) \cdot e^x \right) = 1 \cdot e^x + (k+x) \cdot e^x = ((k+1)+x)e^x.$$

Her har vi brukt definisjonen av de høyere deriverte i den første likheten, $P(k)$ i den andre og derivasjon av produkter i den tredje.

Følgelig er $P(n)$ sann for alle naturlige tall $n$, spesielt for $n = 25$, og vi får

$$f^{(25)}(x) = (25+x)e^x.$$

## Oppgave 5

*Bruk definisjonen av grenseverdien til å vise at* $\lim_{x\to 4}(3x+1) = 13$.

Gitt $\epsilon > 0$ vil vi finne en $\delta > 0$ slik at

$$|x-4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |3x+1-13| < \epsilon.$$

At $|3x+1-13| < \epsilon$ er ekvivalent med at $3|x-4| < \epsilon$, som igjen er ekvivalent med at $|x-4| < \epsilon/3$. Så om vi velger $\delta = \epsilon/3$, får vi at om $|x-4| < \delta$ så er $|3x+1-13| < \epsilon$.

## Oppgave 6

*La*

$$f(x) = \tan^{-1}(\ln x), \qquad x > 0.$$

**a)** *Finn den deriverte til* $f(x)$*, og vis at den dobbeltderiverte er*

$$f''(x) = -\left(\frac{\ln x + 1}{x + x(\ln x)^2}\right)^2, \qquad x > 0.$$

*Finn tangenten til* $y = f(x)$ *i punktet* $(1, 0)$.

Kjerneregelen gir

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\ln x)^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x + x(\ln x)^2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+x(\ln x)^2)^2}\left(1 + (\ln x)^2 + x(2\ln x)\frac{1}{x}\right) = -\left(\frac{\ln x + 1}{x + x(\ln x)^2}\right)^2.$$

Tangenten er gitt ved $y - f(1) = f'(0)(x-1)$, eller

$$y = x - 1.$$

**b)** *Bestem* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *og* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Da $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ og $\tan^{-1}$ har horisontal asymptote $-\pi/2$ i $-\infty$ blir

$$\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) = -\pi/2.$$

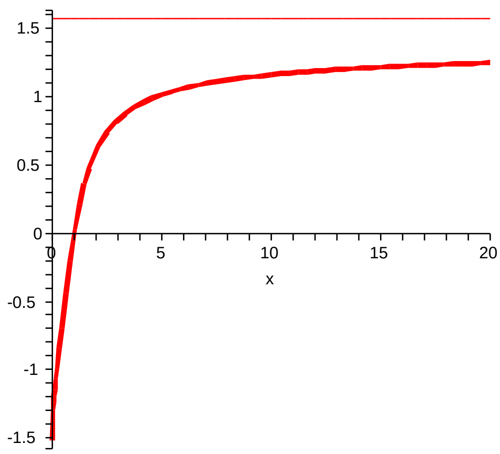
Likeledes, da $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$ og $\tan^{-1}$ har horisontal asymptote $\pi/2$ i $\infty$ blir

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(\ln x) = \pi/2.$$

Dette argumentet er greit nok, men vi kan også vise det rett fra definisjonene: at $\tan^{-1}$ har horisontal asymptote $-\pi/2$ i $-\infty$ betyr at for for alle $\epsilon > 0$ finnes en $M$ slik at om $u < M$ så er $|\tan^{-1} u + \pi/2| \leq \epsilon$, og at $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ betyr at for alle $M$ finnes der $\delta > 0$ slik at om $0 < x < \delta$ så er $\ln x < M$. Gitt $\epsilon$, velg en slik $M$, og derefter den til $M$ passende $\delta$, og få at om $0 < x < \delta$ så er $|\tan^{-1}(\ln x) + \pi/2| \leq \epsilon$. Likedan for den andre grensen.

**c)** *Skissér kurven $y = f(x)$ på grunnlag av det du har funnet ut.*

Fra de tidligere punktene har vi at grafen er voksende (den deriverte er alltid positiv) og konkav (den dobbeltderiverte er bestandig negativ). Videre har vi grenseverdiene når $x$ går mot null og uendelig, pluss det opplagte nullpunktet i $x = 1$. Til hjelp med tegningen ser vi også at $f'(x)$ går mot uendelig når $x$ går mot null (oppgave: vis det!), og mot null når $x$ går mot uendelig. Tilsammen gir dette at grafen må se omtrent slik ut: (den tynne linjen er asymptoten $y = \pi/2$, som vi ser at grafen nærmer se kun meget langsomt)




**d)** *Skriv opp Taylorpolynomet til $f$ av grad 1 om $x = 1$ med restledd. Vis at $-1.21 < f''(X) < 0$ for $X \in [1, 1.1]$ og konkludér at $0.09 < f(1.1) < 0.1$.*

$$\begin{aligned}P_1(x) + E_1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(X)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 0 + (x-1) - \left(\frac{\ln X + 1}{X + X(\ln X)^2}\right)^2 \frac{1}{2}(x-1)^2.\end{aligned}$$

Om $X \in [1, 1.1]$ er telleren $\ln X + 1$ mellom 1 og $\ln 1.1 + 1 < 1.1$, og nevneren $X + X(\ln X)^2$ mellom 1 og $1.1(1 + (\ln(1.1)^2)$, så

$$-1.21 < -\left(\frac{1 + \ln 1.1}{1}\right)^2 \leq -\left(\frac{\ln X + 1}{X + X(\ln X)^2}\right)^2 \leq -\frac{1}{(1.1(1 + (\ln(1.1)^2)))^2} < 0.$$

Av dette følger det at $f(1.1) = P_1(1.1) + E_1(1.1)$ begrenses nedtil av $P_1(1.1) - 1.21\frac{(1.1-1)^2}{2} = 0.1 - 0.00605 = 0.9395$ og oventil av $P_1(1.1) - 0 = 0.1$.

Vi kan alternativt kurvedrøfte $g(X) = \frac{\ln X+1}{X+X(\ln X)^2}$ for $X \in [1, 1.1]$, og finne at $g'(X) = -\frac{\ln X((\ln X)^2+1+2\ln X+3)}{(X+X(\ln X)^2)^2}$ som er negativ for alle $X \in (1, 1.1)$. Derfor har vi

$$-0.9737 \approx -(g(1.1))^2 > -(g(X))^2 > -(g(1))^2 \approx -1,$$

og få

$$0.099515 \approx 0.1 - \frac{0.9737}{2}(0.1)^2 > f(1.1) > 0.1 - \frac{1}{2}(0.1)^2 \approx 0.099500.$$

Dette er jo veldig nøyaktig (meget bedre enn oppgaven bad om!), og $\tan^{-1}(\ln(1.1)) \approx 0.09502$.

# Oppgave 7

*Er følgende utsagnene sanne? Begrunn svarene kort. Funksjonen $f$ er deriverbar med positiv derivert på $[0, 1]$.*

1. *Ligningen $f(x) = 0$ har maksimalt én løsning i intervallet $(0, 1)$.*

   Ja, dette er sant som følge av sekantsetningen (the mean value theorem), som hadde som konsekvens at funksjoner med positiv derivert er voksende. Derfor, om der er en $c$ slik at $f(c) = 0$ så er $f(x) < 0$ for alle $x < 0$ of $f(x) > 0$ for alle $x > c$.

2. *Om $f(0) = -4$ og $f(1) = 23$ så har ligningen $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning i intervallet $(0, 1)$.*

   Ja, dette er sant det også: skjæringssetningen (the intermediate value theorem) sier at kontinuerlige funksjoner definert på $[0, 1]$ med både positive og negative verdier har nullpunkter. Fra momentet ovenfor vet vi at der ikke er flere enn ett nullpunkt, så der for er der nøyaktig ett nullpunkt. At funksjonen er kontinuerlig følger av at den er deriverbar.

Bjørn Ian Dundas