Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bergen, oktober 11. 2004.
Bokmål

Deleksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 11. oktober 2004, kl. 09-12.

Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator uten grafisk display.

Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Beregn grensen

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

f.eks. ved hjelp av l'Hôpitals regel.

Oppgave 2

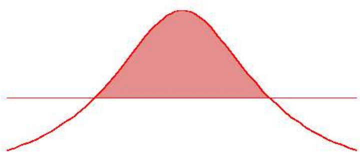
I Postens prisliste finner vi maksimumsmålene for sending av en rull med Norgespakke: "Lengde inntil 240 cm, lengde + omkrets inntil 360 cm". Med rull forstås en sylinder med sirkulært tversnitt. Vi ønsker å sende en rull med størst mulig volum. Hva blir lengden?

Oppgave 3

Finn arealet av området under kurven

$$y = \frac{2}{1 + x^2}$$

og over linjen $y = 1$.



Oppgave 4

Finn den 25. deriverte til $f(x) = x\,e^x$ (bruk induksjon).

Oppgave 5

Bruk definisjonen av grenseverdien til å vise at $\lim_{x \to 4}(3x + 1) = 13$.

Oppgave 6

La

$$f(x) = \tan^{-1}(\ln x), \qquad x > 0.$$

a) Finn den deriverte til $f(x)$, og vis at den dobbeltderiverte er

$$f''(x) = -\left(\frac{\ln x + 1}{x + x(\ln x)^2}\right)^2, \qquad x > 0.$$

Finn tangenten til $y = f(x)$ i punktet $(1, 0)$.

b) Bestem $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

c) Skissér kurven $y = f(x)$ på grunnlag av det du har funnet ut.

d) Skriv opp Taylorpolynomet til f av grad 1 om $x = 1$ med restledd. Vis at $-1.21 < f''(X) < 0$ for $X \in [1, 1.1]$ og konkludér at $0.09 < f(1.1) < 0.1$.

Oppgave 7

Funksjonen f er deriverbar med positiv derivert på $[0, 1]$.

Er følgende utsagnen sanne? Begrunn svarene kort.

1. Ligningen $f(x) = 0$ har maksimalt én løsning i intervallet $(0, 1)$.
2. Om $f(0) = -4$ og $f(1) = 23$ så har ligningen $f(x) = 0$ nøyaktig én løsning i intervallet $(0, 1)$.

Bjørn Ian Dundas