Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bergen, 15. desember 2004.
Bokmål

Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 15. desember 2004, kl. 09-13.

Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator uten grafisk display.

Alle svar skal begrunnes. Det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Betrakt de to komplekse tallene

$$z = \sqrt{3} + i \qquad \text{og} \qquad w = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Regn ut $z + w$ og z/w. Skriv z, w og z/w på polar form. Avmerk z, w, $z + w$ og z/w i det komplekse plan.

b) Finn alle løsningene til

$$z^3 = 8i.$$

Oppgave 2

Regn ut integralet

$$\int \frac{2x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2}\, dx.$$

Oppgave 3

Finn tangentplanet til flaten

$$z = f(x, y) = x^2 y$$

i punktet $(1, 2)$.

Oppgave 4

a) Avgjør om rekkene konvergerer:

$$i) \quad \sum_{n=23}^{\infty} \frac{1}{n-1} \qquad\qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n! - 2}$$

b) Vis ved integralkriteriet eller på annen måte at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

konvergerer.

La S være summen av rekken og S_N summen av de N første leddene. Finn et heltall N slik at $|S - S_N| < \frac{1}{100}$.

Oppgave 5

Frysepunktet T for saltvann er en funksjon av ionekonsentrasjonen x, og teoretiske betraktninger gir at T tilfredsstiller initialverdiproblemet

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{aT^2}{1+bx}, \qquad T(0) = T_0$$

hvor a og b er positive konstanter, og T_0 er frysepunktet for rent vann (målt i Kelvin).

Løs dette initialverdiproblemet.

I deler av Barentshavet er $x = 1.2$. Hva er frysepunktet for havvannet der? Bruk verdiene $a = 2.49 \cdot 10^{-5}$, $b = 0.018$ og $T_0 = 273.15$ (måleenhetene er utelatt).

Oppgave 6

La

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \end{cases}.$$

Begrunn at f er deriverbar i $x = 0$. Eksisterer $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$?

Oppgave 7

La følgen $\{a_n\}$ være gitt ved

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n - 1 + e^{-a_n}, \qquad n > 0.$$

Begrunn (f.eks. ved induksjon og kurvedrøfting av funksjonen $f(x) = x - 1 + e^{-x}$) at $a_n > 0$ for alle n og at følgen er avtagende. Hva er grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$?

Bjørn Ian Dundas, Per Manne