**Deleksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i matematikk I**

Mandag 15. mars 2004, kl. 09-12

LØYSINGSFORSLAG

## OPPGÅVE 1:

Finn ekstremalverdiane til funksjonen:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & -1 < x \leq 0, \\ x^2 - 4x, & 0 < x \leq 5. \end{cases}$$

For kva verdiar av $x$ har funksjonen absolutte (globale) minimum og maksimum?

## SVAR:

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & -1 < x < 0, \\ 2x - 4, & 0 < x < 5, \end{cases}$$

som gir at $f' > 0$ i intervalla $-1 < x < 0$ og $2 < x < 5$, og $f' < 0$ når $0 < x < 2$.
Lokale maksimumsverdiar er $f(0) = 1$ og $f(5) = 5$,
lokalt minimum er $f(2) = -4 < \lim_{x \to -1^+} f(x) = -2$.
Funksjonen har dermed globalt maksimum i $x = 5$ og globalt minimum i $x = 2$.

## OPPGÅVE 2:

Finn dei deriverte til

$$i) \;\; f(x) = \ln(\cos x), \qquad ii) \;\; f(x) = \mathrm{Arcsin}(\tan x).$$

## SVAR:

$$i) \;\; (\ln(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$ii) \;\; (\mathrm{Arcsin}(\tan x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - \tan^2 x}} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x \sqrt{\cos 2x}}.$$

## OPPGÅVE 3:

Finn grenseverdiane

$$i) \;\; \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^4 + 2x^2} - x^2, \qquad ii) \;\; \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}.$$

SVAR:

$$i)\quad \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+2x^2} - x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)} = 1$$

$$ii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\sin x} = 1 \quad \text{(l'Hopitals regel).}$$

OPPGÅVE 4:

a) Vis at dersom

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^k},$$

når $k$ er eit positivt heiltal, så er

$$\frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

b) Kan vi bruke svaret i a), saman med matematisk induksjon, til å slutte at

$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots?$$

SVAR:

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \frac{(-1)^(k-1)k!}{(1+x)^k},$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^k}\right),$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}} = \frac{(-k)\cdot(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^{k+1}},$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{d^{k+1} f}{dx^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1} k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

b) Sjøl om induksjons-steget er korrekt, har vi at

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{-1}{(1+x)^2} \neq \frac{-1}{(1+x)^1},$$

(formelen for $k = 1$), og formelen er gal for alle $k = 1, 2, \ldots$. (Med $f = -\ln(1+x)$ derimot...)

## OPPGÅVE 5:

a) Gitt at $f(1) = 4$, $f'(1) = 2$ og $|f''(x)| < |\sin(\pi x)|$. Bruk dette til å finne ei best mogeleg tilnærming til $f(2)$.

b) Finn ei øvre grense for feilen i tilnærminga du har funne i a).

## SVAR:

a) $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + E(x)$ med $E(x) = f''(X)(x-1)^2/2$ og $X \in \text{int}\{x, 1\}$. Dette gir $\underline{f(2) \approx 4 + 2 \cdot (2-1) = 6}$.

b) Fordi $X \in \text{int}\{1, 2\}$ har vi at $|f''(X)| < |sin(\pi X)| < 1$. Dermed får vi at feil-leddet kan avgrensast som $|E(x)| = |f''(X)(x-1)^2/2| < |x-1|^2/2$. Vi får dermed ei øvre grense for feilen i $x = 2$ gitt ved $\underline{|E(2)| < 1/2}$.

## OPPGÅVE 6:

La

$$f(x) = \exp(x) \ \text{ og } \ g(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x}.$$

a) Konstruer den samansatte funksjonen

$$F(x) = f \circ g(x) = f(g(x)).$$

b) Bruk at $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ til å finne grenseverdien

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

## SVAR:

a)

$$f(g(x)) = \exp\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \exp(\ln(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}.$$

b)

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to 0} g(x)) = f(1) = e.$$

MERK: Ombytting av lim og $f(\cdot)$ er tillate fordi $f$ er ein kontinuerlig funksjon for alle $x$.

## OPPGÅVE 7:

Moores lov postulerer at datamaskiner si prosessoryting i snitt vil doble kvar 18 månad. Kor mykje relativ auke i prosessoryting kan vi vente over ein 10 års periode? (Hint: Bruk eksponentiell vekst til å modellere problemet.)

<u>SVAR:</u>

Vi modellerer prosessoryting $y = y(t)$ som ein eksponentiell vekstprosess:

$$y(t) = y_0 \exp(kt),$$

kor $y_0$ er yting ved $t = 0$, og tida $t$, blir målt i månader. Ved $t = 18$ har vi

$$y(18) = 2y_0 = y_0 \exp(18k) \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{18}.$$

Over ein 10 års periode kan vi dermed vente ein relativ auke i prosessoryting gitt ved:

$$y(120)/y_0 = \exp(\frac{\ln 2}{18} 120) \approx 100.$$