Eksamen i emnet MAT111(M100) - Grunnkurs i matematikk I

Onsdag 19. mai 2004, kl. 09-13(15)

LØYSINGSFORSLAG

OPPGÅVE 1:

Finn dei deriverte til

$$\text{a)}\ \ f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sin^{-1}(u)du, \qquad \text{b)}\ \ f(x) = x^{\ln(x)}.$$

<u>SVAR:</u>

$$\text{a)}\ \ \frac{d}{dx}\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sin^{-1}(u)du = x\cos(x) + \sin^{-1}(\cos(x))\sin(x) = x\cos(x) + (\frac{\pi}{2} - x)\sin(x).$$

I den siste omforminga må vi anta at $0 \le x \le \pi/2$, for å sikre at vi er på verdimengda til $\sin^{-1}$.

$$\text{b)}\ \ f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}((\ln(x))^2) = x^{\ln(x)}\frac{2}{x}\ln(x) = x^{\ln(x)-1}\ln(x^2).$$

OPPGÅVE 2:

Rekn ut dei ubestemte integrala

$$\text{a)}\ \ \int \frac{\cos^{-1}(\ln(x))}{x}dx, \qquad \text{b)}\ \ \int \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}dx.$$

<u>SVAR:</u>

a) La $u = \ln(x)$ s.a. $du = dx/x$:

$$\int \frac{\cos^{-1}(\ln(x))}{x}dx = \int \cos^{-1}(u))du =$$

$$u\cos^{-1}(u) + \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = u\cos^{-1}(u) - \sqrt{1-u^2} + C =$$

$$\underline{\ln(x)\cos^{-1}(\ln(x)) - \sqrt{1-(\ln(x))^2} + C.}$$

b) Delbrøkoppspalting gir:

$$\frac{12x-5}{6x^2-5x+1} = \frac{2}{2x-1} + \frac{3}{3x-1}.$$

Integrerer og får:

$$\int \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}dx = \int (\frac{2}{2x-1} + \frac{3}{3x-1})dx = \underline{\ln|6x^2-5x+1| + C.}$$

(NB: Substitusjonen $u = 6x^2 - 5x + 1$ fører fram minst like lett.)

OPPGÅVE 3:

Finn volumet av omdreiingslekamen som er danna ved å rotere området avgrensa av $y = 0$, $y = \sqrt{4-(x-3)^2}$, $x = 2$, og $x = 4$ om x-aksen.

SVAR:

a) Volumet er gitt ved:

$$V = \pi \int_2^4 f(x)^2 dx = \pi \int_2^4 (4-(x-3)^2)dx = \frac{22\pi}{3}.$$

OPPGÅVE 4:

a) La $a_1 = 0$ og $a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Vis at sekvensen $\{a_n\}$ veks monotont og er avgrensa.

b) Forklar kvifor sekvensen er konvergent, og finn grenseverdien $\lim_{n\to\infty} a_n$.

SVAR:

a) Vi ser monotonisitet ved induksjon: 1) $a_2 = 2 > 0 = a_1$. 2) Anta at $a_{k+1} > a_k$, $k > 1$. Får at $a_{k+2} = \sqrt{4+3a_{k+1}} > \sqrt{4+3a_n} = a_{k+1}$. 1)+2)+matematisk induksjon gir at $a_{n+1} > a_n$ for $n = 1, 2, \ldots$, som vi skulle vise.
Viser tilsvarande at sekvensen er avgrensa: 1) $a_1 = 0 < 20$ (prøver med $K = 20$ som ei "tilfeldig" valgt øvre grense for sekvensen). 2) Anta $a_k < 20$, $k > 1$. Får at $a_{k+1} = \sqrt{4+3a_k} > \sqrt{4+3\cdot 20} = 8 < 20$. 1)+2)+matematisk induksjon gir at $a_n < 20$ for $n = 1, 2, \ldots$, som viser at sekvensen har ei øvre grense.

b) Vi har at monotont veksande sekvensar som har ei øvre grense alltid er konvergente (reformulering av komplettheitsaksiomet for reelle tal). Det følger dermed at

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{4+3a_n} = \sqrt{4+3L}.$$

Dette gir ei 2.gradslikning for L,

$$L^2 - 3L - 4 = 0$$

som har røtter $L = -1$ og $L = 4$. Vi må velge den positive rota sidan sekvensen er positiv, og får dermed:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4.$$

OPPGÅVE 5:

Avgjer om følgjande rekker konvergerer:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\pi}, \quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\pi(\sqrt{n^2+2n}-n)}.$$

SVAR:

a) Dette er ei p-rekke med $p = \pi \approx 3.14 > 1$. Rekka er dermed konvergent.

b) Bruker grensesamanlikningstest med rekka i a):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 1,$$

som viser at rekka konvergerer.

OPPGÅVE 6:

a) Vis at Taylor-rekka til $\ln(x)$ om $x = 1$ er gitt som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

b) For kva verdiar av x konvergerer rekka i a) absolutt eller betinga, og for kva x-verdiar divergerer rekka?

c) Vis at rekka i a) konvergerer mot $\ln(x)$ når $1/2 \leq x \leq 2$. (Hint: Studer restleddet til rekka.)

SVAR:

a)

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \ln(x) & f(1) = 0, \\
f'(x) = 1/x & f'(1) = 1, \\
f''(x) = -1/x^2 & f''(1) = -1, \\
f'''(x) = 2/x^3 & f'''(1) = 2, \\
\vdots & \vdots \\
f^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n & f^n(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Dette innsatt i formelen for Taylor-rekka gir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \cdots$$

b) La $a_n = (-1)^{n-1}(x-1)^n/n$. Forholdstesten gir at

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x-1|,$$

som viser at rekka konvergerer absolutt når $|x-1| < 1$ dvs. for x i intervallet $(0, 2)$. For $x = 2$ har vi ei konvergent alternerande rekke, dvs. rekka konvergerer betinga for $x = 2$ (men ikkje absolutt konvergens fordi $|a_n| = 1/n$ når $x = 2$). For $x = 0$ er alle ledda negative og rekka oppfører seg som den harmoniske rekka, dvs. rekka diveregerer for $x = 0$. For $|x-1| > 1$ vil $|a_n| \to \infty$ når $n \to \infty$, og rekka divergerer.

c) Rest-leddet til Taylor-polynomet av n-te grad til $\ln(x)$ om $x = 1$ er gitt ved

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(X)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{1}{n}\frac{(x-1)^{n+1}}{X^{n+1}},$$

kor X er i intervallet mellom 1 og x.
For $1 \leq x \leq 2$ er $1 < X < 2$ og $|x-1|/|X| < |x-1| \leq 1$.
For $1/2 \leq x \leq 1$ er $1/2 < X < 1$ og $|x-1|/|X| < 2|x-1| \leq 1$.
Utifrå dette konkluderer vi at $|E_n(x)| \to 0$ når $1/2 \leq x \leq 2$, og Taylor-rekka konvergerer difor mot $\ln(x)$ i dette intervallet. (Vha. kompleks funksjonsteori kan vi vise at rekka konvergerer mot $\ln(x)$ for $0 < x \leq 2$.)

OPPGÅVE 7:

Løys initialverdiproblema

$$\text{a)} \quad \frac{dy}{dt} - 4y = e^{4t}, \quad y(0) = 10,$$

$$\text{b)} \quad (1+x^2)\frac{dy}{dx} = (1+y^2), \quad y(0) = 1.$$

<u>SVAR:</u>

a) Dette er ei 1. ordens lineær likning med integrerande faktor e^{-4t}:

$$\frac{d}{dt}(e^{-4t}y) = 1 \Leftrightarrow y(t) = (t+C)e^{4t}.$$

Initialkravet gir $y(0) = C = 10$. Dvs.:

$$\underline{y(t) = (t+10)e^{4t}.}$$

b) Dette er ei separabel differensiallikning:

$$(1+x^2)\tfrac{dy}{dx} = (1+y^2)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\tan^{-1}(y) = \tan^{-1}(x) + C.$$

Initialkravet gir:

$$\tan^{-1}(1) = \tan^{-1}(0) + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{4},$$

og vi får:

$$\underline{y(x) = \tan(\tan^{-1}(x) + \frac{\pi}{4}) = \frac{1+x}{1-x}.}$$

(I siste steget har vi brukt at

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}.)$$

OPPGÅVE 8:

Vis at kurvene gitt ved

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C_1 \text{ og } y^4 = C_2x^2,$$

kor C_1 og C_2 begge er positive konstantar, vil skjere ein annan ortogonalt.

SVAR:

Implisitt derivasjon gir

$$2x + yy' = 0 \Rightarrow (\frac{dy}{dx})_1 = -\frac{2x}{y},$$

og

$$4y^3y' = 2C_2x \Rightarrow (\frac{dy}{dx})_2 = \frac{C_2x}{2y^3} = \frac{C_2x^2y}{2y^4x} = \frac{y}{2x}.$$

Det følgjer at

$$(\frac{dy}{dx})_1(\frac{dy}{dx})_2 = -1,$$

som viser at kurvene vil skjere ein annan ortogonalt (kurvene vil opplagt skjere ein annan sidan den første kurvefamilien representerer ellipser med sentrum i origo, og den andre representerer parabler som går gjennom origo).

TILLEGG M100 (2 timer ekstra)

OPPGÅVE 9:

La

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i.$$

a) Rekn ut $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ og z_1/z_2.

b) Skriv z_1 på polar form og rekn ut z_1^4.

c) Finn alle dei komplekse løysingane til likninga

$$z^8 + 2z^4 + 1 = 0.$$

SVAR:

a)

$$z_1 + z_2 = 2i, \quad z_1 \cdot z_2 = -2, \quad z_1/z_2 = 1 - i.$$

b)

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_1^4 = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^4 = 2e^{i\pi} = -2.$$

c)

$$z^8 + 2z^4 + 1 = (z^4 + 1)^2 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow \underline{z = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\frac{5\pi}{4}}, e^{i\frac{7\pi}{4}}}.$$

OPPGÅVE 10:

Løys initialverdiproblemet:

$$y^2\frac{dy}{dx} = y^3 - 3, \quad y(0) = 2.$$

<u>SVAR:</u>

Likninga er separabel og vi får:

$$\frac{y^2 dy}{y^3-3} = dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ln(y^3-3) = x + C_1 \Leftrightarrow$$
$$y^3 - 3 = C\exp(3x) \Leftrightarrow \underline{y(x) = \sqrt[3]{C\exp(3x)+3}}.$$

Initialkravet gir

$$y(0) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{C+3} = 2 \Leftrightarrow \underline{C = 5.}$$

OPPGÅVE 11:

La

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

a) Finn likninga for tangentplanet til flata $z = f(x,y)$ i punktet $(x,y) = (0,0)$.

b) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkt til f.

<u>SVAR:</u>

a) Tangentplanet:

$$z = 0$$

b) Kritisk punkt:

$$(x,y) = (0,0)$$

Klassifisering:

$$A = f_{xx}(0,0) = 2, \quad C = f_{yy}(0,0) = -2, \quad B = f_{xy}(0,0) = 1.$$

Origo er eit <u>sadelpunkt</u> fordi $-4 = AC < B^2 = 1$.