BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i matematikk I

Onsdag 19. mai 2004, kl. 09-13

Tillatte hjelpemiddel: Lærebok og kalkulator.

OPPGAVE 1:

Finn de deriverte til

$$\text{a)}\ \ f(x) = \int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \sin^{-1}(u)du, \qquad \text{b)}\ \ f(x) = x^{\ln(x)}.$$

OPPGAVE 2:

Regn ut de ubestemte integralene

$$\text{a)}\ \ \int \frac{\cos^{-1}(\ln(x))}{x}dx, \qquad \text{b)}\ \ \int \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}dx.$$

OPPGAVE 3:

Finn volumet av omdreiningslegemet som er dannet ved å rotere området avgrenset av $y = 0$, $y = \sqrt{4-(x-3)^2}$, $x = 2$, og $x = 4$ om x-aksen.

OPPGAVE 4:

a) La $a_1 = 0$ og $a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Vis at sekvensen $\{a_n\}$ vokser monotont og er avgrenset.

b) Forklar hvorfor sekvensen er konvergent, og finn grenseverdien $\lim_{n\to\infty} a_n$.

OPPGAVE 5:

Avgjør om følgende rekker konvergerer:

$$\text{a)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}, \qquad \text{b)}\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}(\sqrt{n^2+2n}-n)}.$$

OPPGAVE 6:

a) Vis at Taylor-rekken til $\ln(x)$ om $x = 1$ er gitt som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

b) For hvilke verdier av x konvergerer rekken i a) absolutt eller betinget, og for hvilke x-verdier divergerer rekken?

c) Vis at rekken i a) konvergerer mot $\ln(x)$ når $1/2 \leq x \leq 2$. (Hint: Studer restleddet til rekken.)

OPPGAVE 7:

Løs initialverdiproblemene

$$\text{a)}\ \ \frac{dy}{dt} - 4y = e^{4t}, \quad y(0) = 10,$$

$$\text{b)}\ \ (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = (1 + y^2), \quad y(0) = 1.$$

OPPGAVE 8:

Vis at kurvene gitt ved

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C_1 \ \text{ og } \ y^4 = C_2 x^2,$$

hvor C_1 og C_2 begge er positive konstanter, vil skjære en annen ortogonalt.

Helge K. Dahle, Trygve Johnsen