Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bergen, 19. desember 2005.
Bokmål

Løsningsforslag til Eksamen i MAT111

Mandag 19. desember 2005, kl. 09-13.

Dette er kun et løsningsFORSLAG.

Oppgave 1

a) *Betrakt de to komplekse tallene*

$$z = 1 + i \qquad og \qquad w = -i.$$

Regn ut $z + w$ og z/w. Skriv z, w og z/w på polar form. Avmerk z, w, $z + w$ og z/w i det komplekse plan.

$z + w = 1 + i + (-i) = 1$, $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(1+i)i}{1} = -1 + i$.

$z = |z|e^{i\theta}$ hvor $|z|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ og $1 = \sqrt{2}\cos\theta$, $1 = \sqrt{2}\sin\theta$, så $\theta = \pi/4$, og $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$w = |w|e^{i\tau}$ hvor $|w|^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$ og $0 = \cos\tau$, $-1 = \sin\tau$, så $\tau = -\pi/2$, og $w = e^{-i\pi/2}$.

$$\frac{z}{w} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/2}} = \sqrt{2}e^{i\pi/4-(-i\pi/2)} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

Tegn tegningen selv!

b) *Finn alle løsningene til ligningen*

$$z^4 = -4.$$

$-4 = -4e^{i\pi}$, så de fire fjerderøttene til -4 er gitt ved

$$z_k = 4^{1/4}e^{i\frac{\pi+k2\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

m.a.o. $z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} = -1 - i$ og $z_3 = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = 1 - i$.

Oppgave 2

Avgjør om rekkene 1), 2) og 3) nedenfor konvergerer eller divergerer.

$$1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2-2}, \qquad 2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad 3)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n).$$

1) Grensesammenligningstest med den harmoniske rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^2-2}}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1-2/n^2} = 1.$$

Da den harmoniske rekken er divergent er altså $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2-2}$ divergent.

2) Forholdstesten: $\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}/(n+1)!}{3^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, og rekken er konvergent.

3) n-teleddstesten: $\lim_{n\to\infty} 1+(-1)^n$ eksisterer ikke (følgen $\{1+(-1)^n\}$ er 0 ved odde n og 2 ved jevne n), så rekken divergerer.

Oppgave 3

En ball har egenskapen at om du slipper den ned på et betonggulv, spretter den opp $5/6$ *av høyden du slapp den fra. Om ballen slippes fra* 3 *meter og får sprette opp og ned i det uendelige, hva er den totale distansen ballen tilbakelegger?*

Ballen faller fra høyden $h = 3$ (alt i meter), og spretter opp igjen $\frac{5}{6}h$. Så faller den ned igjen ($\frac{5}{6}h$), og neste gang den spretter opp blir høyden $\frac{5}{6} \cdot (\frac{5}{6}h)$. Det fortsetter i samme mønster, og om vi lar $r = \frac{5}{6}$ blir den totale distansen derfor

$$h + 2rh + 2r^2h + 2r^3h + \cdots = -h + \sum_{k=0}^{\infty} 2hr^k = -h + \frac{2h}{1-r},$$

eller ved innsetting $-3 + \frac{2\cdot 3}{1-5/6} = -3 + 36 = 33$ (meter).

Oppgave 4

Finn tangentplanet til flaten

$$z = f(x,y) = x \ln y$$

i punktet $(1,1)$.

Ligning for tangentplanet til $z = f(x,y)$ i punktet (a,b):

$$z - f(a,b) = D_1 f(a,b) \cdot (x-a) + D_2 f(a,b) \cdot (y-b).$$

Her er $(a,b) = (1,1)$, $f(1,1) = 1 \ln 1 = 0$, $D_1 f(x,y) = \ln y$, $D_1 f(1,1) = 0$, $D_2 f(x,y) = x/y$, $D_2 f(1,1) = 1$, så tangentplanet har formelen

$$z = y - 1.$$

Oppgave 5

a) *La a være et reelt tall, og betrakt differensialligningen*

$$y' = a \cdot x \cdot y^2.$$

Finn $y(x)$ og a gitt at $y(0) = 1$ og $y(2) = 4$.

Separabel differensialligning med konstant løsning gitt ved $y = 0$. Denne passer ikke inn med de oppgitte verdiene. For å finne de andre løsningene deler begge sider av ligningen på y^2 og integrerer m.h.p. x:

$$\begin{array}{ccc} \int \frac{1}{y(x)^2}\, y'(x)\, dx & = & \int ax\, dx \\ \| & & \| \\ -\frac{1}{y(x)} + C_1 & & \frac{a}{2}x^2 + C_2 \end{array}$$

(de vertikale likhetene fremkommer ved substutusjon og integrasjon), eller m.a.o. $-\frac{1}{y(x)} = \frac{a}{2}x^2 + C$. Setter vi inn $y(0) = 1$ får vi $-\frac{1}{1} = \frac{a}{2}0^2 + C$, så $C = -1$. Setter vi inn $y(2) = 4$ får vi $-\frac{1}{4} = \frac{a}{2}2^2 - 1$, så $a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$.

Altså får vi

$$y(x) = -\frac{1}{\frac{a}{2}x^2 + C} = -\frac{1}{\frac{3}{16}x^2 - 1} = \frac{16}{16 - 3x^2}.$$

(sjekk ved derivasjon at dette er løsningen av differensialligningen).

b) *Løs differensialligningen*

$$y' + \frac{3x}{x^2+1} y = \frac{6x}{x^2+1}.$$

Førsteordens lineær differensialligning. Ved substitusjonen $u = x^2 + 1$ har vi

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+1) + C,$$

så om vi setter $\rho(x) = e^{\frac{3}{2}\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{3/2}$ får vi

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\rho(x)\cdot y(x)\right) &= \rho(x)\cdot y'(x) + \rho'(x)\cdot y(x) \\
&= (x^2+1)^{3/2}\left(y'(x) + \frac{3x}{x^2+1}y(x)\right) \\
&= (x^2+1)^{3/2}\frac{6x}{x^2+1} \\
&= 6x\sqrt{x^2+1}
\end{aligned}
$$

Følgelig har vi

$$\rho(x)\cdot y(x) = \int 6x\sqrt{x^2+1}\,dx = 3\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C = 2(x^2+1)^{3/2}$$

så

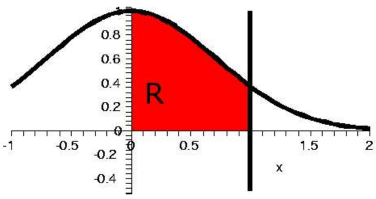
$$y(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\left(2(x^2+1)^{3/2} + C\right) = 2 + \frac{C}{(x^2+1)^{3/2}}.$$

Eventuelt kan vi løse oppgaven som en separabel differensialligning:

$$y' = \frac{3x}{x^2+1}\cdot(2-y).$$

Uansett metode bør du sjekke ved innsetting at løsningen du finner passer inn i differensialligningen: $y' + \frac{3x}{x^2+1}y = -\frac{3}{2}\frac{C2x}{(x^2+1)^{5/2}} + \frac{2\cdot 3x}{x^2+1} + \frac{3xC}{(x^2+1)^{5/2}} = \frac{6x}{x^2+1}$.

Oppgave 6



La R være området begrenset av x-aksen, y-aksen, kurven $y = e^{-x^2}$ og linjen $x = 1$.
Regn ut volumet av omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie R om y-aksen.

Bruker sylinderskallmetoden ($\int_{\text{innerst}}^{\text{ytterst}} 2\pi r f(r)\,dr$ der $f(r)$ er høyden til legemet ved radius r fra omdreiningsaksen):

$$V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2}dx = -\int_0^{-1} \pi e^u du = -\pi[e^u]_0^{-1} = \pi(1-e^{-1}),$$

hvor vi har benyttet substitusjonen $u = -x^2$.

Hvis du vil regne ut volumet ved skivemetoden må du dele problemet i to. Fra $y = 0$ til $y = e^{-1}$ er legemet begrenset av $x = 1$, mens fra $y = e^{-1}$ er legemet begrenset av $x = \sqrt{-\ln y}$ (fås ved å løse $y = e^{-x^2}$)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\cdot 1^2\cdot e^{-1} + \int_{e^{-1}}^1 \pi(\sqrt{-\ln y})^2 dy = \pi(e^{-1} - \int_{e^{-1}}^1 \ln y\,dy) \\
&= \pi(e^{-1} - [y\ln y - y]_{e^{-1}}^1) = \pi(1-e^{-1}).
\end{aligned}
$$

Oppgave 7

Vis ulikhetene

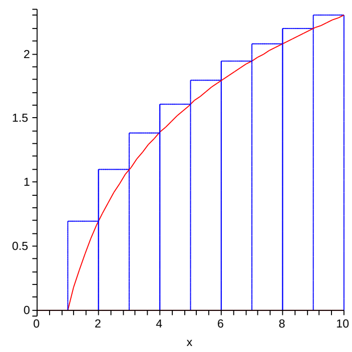
$$\ln(N!) = \sum_{k=1}^{N} \ln k > \int_1^N \ln x \, dx = N \ln(N) - N + 1 > N$$

for $N \geq 7$.

Avgjør om rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln((n^2)!)}$$

konvergerer.



Summen $\sum_{k=1}^{N} \ln k$ kan representeres som summen av arealene til rektangler med bredde 1 og høyde $\ln k$ der k løper fra 1 til N. Integralet er arealet under kurven $y = \ln x$ mellom $x = 1$ og $x = N$. Siden ln er voksende (og $\ln 1 = 0$) vil arealene under rektanglene representere øvre Riemannsum, og er derfor større enn integralet, se figuren til høyre.

$\int_1^N \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^N = N \ln N - N - (1 \ln 1 - 1) = N \ln N - N + 1$.

Vi skal vise at $N \ln N - N + 1 > N$ for $N \geq 7$. Funksjonen $f(x) = x \ln x - 2x + 1$ er voksende for $x \geq e$ (fordi $f'(x) = \ln x - 1$), så det er nok å observere at $f(7) = 7 \ln 7 - 14 + 1 > 0$.

Da $\ln(N!) > N$ for $N \geq 7$ er $1/\ln((n^2)!) < 1/n^2$ for $\sqrt{n} \geq 7$, så sammenligningstesten sier at siden p-rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergerer, så konvergerer også rekken $\sum_{n=2}^{\infty} 1/\ln((n^2)!)$.

Oppgave 8

La $a_0 = 2$ *og*

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \qquad n \geq 0.$$

Vis ved induksjon at $a_n > \sqrt{2}$ *for alle* $n \geq 0$. *Vis at følgen* $\{a_n\}_{n \geq 0}$ *er avtagende og konvergent. Hva konvergerer* $\{a_n\}_{n \geq 0}$ *mot?*

Betrakt påstanden $P(n): \quad a_n > \sqrt{2}$. Ser at $P(0)$ er sann da $a_0 = 2 > \sqrt{2}$. Vil vise at dersom $P(k)$ er sann, så er også $P(k+1)$ sann, for alle $k \geq 0$.

Betrakt funksjonen $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Vi har at $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ er negativ om $x < \sqrt{2}$ og positiv om $x > \sqrt{2}$. Derfor har vi at $x > \sqrt{2}$ medfører at $g(x) > g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. Setter vi $x = a_k > \sqrt{2}$ får vi altså $a_{k+1} = g(a_k) > \sqrt{2}$.

Betrakt påstanden $Q(n): \quad a_{n+1} - a_n < 0$. Vi har at $a_1 = 1.5 < a_0 = 2$ så $Q(0)$ er sann. Anta $Q(k)$ er sann, vil vise $Q(k+1)$ sann, for alle $k \geq 0$.

Vi skal altså vise at $a_{k+2} - a_{k+1} = g(a_{k+1}) - g(a_k) < 0$, men det er sant da $y = g(x)$ er voksende for $x \geq \sqrt{2}$ og vi har antatt at $\sqrt{2} < a_{k+1} < a_k$.

Siden følgen er avtagende og begrenset er følgen konvergent ved kompletthet av de reelle tall. La $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Får da

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(L)$$

siden g er kontinuerlig. Løser vi $L = g(L) = L/2 + 1/L$ med hensyn på L får vi $L^2 = 2$, og siden $L \geq \sqrt{2}$ så får vi

$$L = \sqrt{2}.$$