Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bergen, oktober 15. 2004.

Løsningsforslag til

Midtsemesterevaluering i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 17. oktober 2005, kl. 09-11.

Oppgave 1

Avgjør om følgende grenser eksisterer. Om grensen eksisterer skal du også finne grensen.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Vi prøver l'Hôpitals regel på $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$ da både teller og nevner går mot null. Den deriverte til nevneren er dessuten **aldri** null.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{e^x} = 0.$$

Den første likheten gjelder ved l'Hôpitals regel (da grensen til høyre viser seg å eksistere), og den andre likheten gjelder da teller går mot null mens nevner går mot én.

Vi omskriver

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x},$$

og får et "null over null" uttrykk der nevnerens derivert aldri er null. Prøver l'Hôpitals regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x} \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1,$$

hvor den første likheten gjelder ved l'Hôpitals regel da høyre siden viser seg å eksistere, den andre likheten følger ved litt rydding, og den tredje da $1/x \to 0$.

Oppgave 2

a) *Finn de (absolutte) maksimums- og minimumspunktene til*

$$g(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

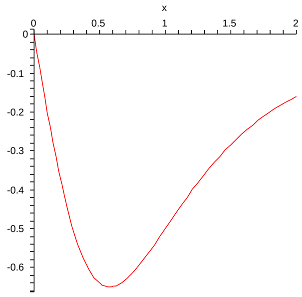
på intervallet $[0, 2]$.

Laver liste over funksjonsverdiene i endepunktene, de kritiske punktene og de singulære punktene. Deriverer for å finne de to siste:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} \\
&= 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}
$$

Endepunkter: 0 og 2, kritiske punkter ($g'(x) = 0$): $x = 3^{-1/2}$, men ingen singulære punkter (da g' er definert overalt). Tabell:

x	$g(x)$
0	-2
$3^{-1/2}$	$-3^{2/3}/8 \approx -0.65$
2	$-4/25 = -0.16$



Vi ser at $x = 0$ gir maksimumsverdien 0, og $x = 3^{-1/2}$ gir minimumsverdien $-3^{2/3}/8 \approx -0.65$. Grafen ser slik ut:

b) *Finn 2.-ordens Taylorpolynom i $a = 1$ til*

$$f(x) = \tan^{-1} x.$$

Skriv opp restleddet.

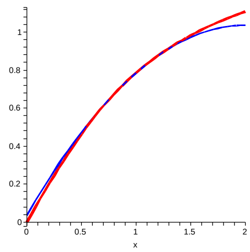
Deriverer (ha med mellomregning i tilfelle du har regnet feil) og får

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\tan^{-1} x$	$\pi/4$
1	$1/(1+x^2)$	$1/2$
2	$-2x/(1+x^2)^2$	$-1/2$
3	$2(3x^2-1)/(1+x^2)^3$	

,

så for en z mellom x og 1 har vi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= P_2(x) + R_2(x) \\
&= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(z)}{6}(x-1)^3 \\
&= \pi/4 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{3z^2-1}{(1+z^2)^3}\frac{(x-1)^3}{3}
\end{aligned}
$$

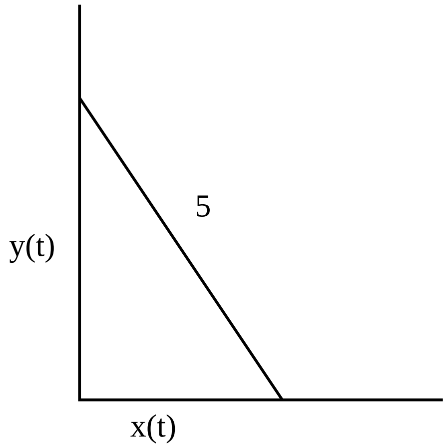


For morro skyld har jeg plottet $f(x)$ og $P_2(x)$ til venstre (f er rød, mens P_2 er blå):

Oppgave 3

En 5 meter lang stige er støttet opp mot en husvegg. Bunnen av stigen glir med en konstant fart $\frac{3}{4}$m/s. Hvor fort daler toppen av stigen idet den er 3 meter over bakken? [Tegn en tegning. Kall avstanden mellom veggen og stigens bunn $x(t)$, og avstanden mellom bakken og stigens topp $y(t)$.]

Vi dropper benevninger (lengde i meter, tid i sekunder), og kaller det gitte tidspunktet t_0 (slik at $y(t_0) = 3$ (og derfor $x(t_0) = 4$) og $x'(t_0) = 3/4$). Betrakt tegningen under. Vi har at



$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25.$$

Deriverer vi ligningen får vi at

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0,$$

og setter vi inn $t = t_0$ får vi

$$2 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 3 \cdot y'(t_0) = 0,$$

eller med andre ord $y'(t_0) = -1$.

Oppgave 4

a) *Vis at du forstår polynomdivisjon og delbrøksoppspalting ved å vise at*

$$\frac{x^2+1}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x},$$

og derved at

$$\int \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx = -x + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Polynomdivisjon gir:

$$\begin{array}{ccl} x^2 & +1 & : -x^2+1 \quad = -1 + \frac{2}{1-x^2} \\ x^2 & -1 & \\ \hline & 2 & \end{array}.$$

Fortsetter med delbrøksoppspalting:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x},$$

eller mao. $2 = A(1+x) + B(1-x)$. Setter vi $x = 1$ får vi $2 = A(1+1)$ og setter vi $x = -1$ får vi $2 = B(1-(-1))$, altså er $A = B = 1$ og

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}.$$

Dette gir altså at

$$\int \frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\,dx$$
$$= -x + \ln|1+x| - \ln|1-x| = -x + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

(her har vi foretatt substitusjonen $u = 1+x$, $du = dx$ i integralet $\int 1/(1+x)dx$ og substitusjonen $u = 1-x$, $du = -dx$ i integralet $\int 1/(1-x)dx$), der den siste likheten kommer av at $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

b) *Regn ut den deriverte*

$$\frac{d}{dx}\int_x^3 \frac{\sin t}{t}\,dt$$

for $x > 0$.

La $G(x) = \int_x^3 \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Fundamentalteoeremet sier at om f er en kontinuerlig funksjon definert på et intervall og $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, så er $F'(x) = f(x)$. Derfor er

$$\frac{d}{dx}G(x) = -\frac{\sin x}{x}.$$

Oppgave 5

Er følgende utsagnen sanne? Begrunn svarene kort.

1. *Om man kjører (på en derivérbar måte) fra Voss til Bergen (*100 *km) på en time trenger man ikke på noe tidspunkt å ha kjørt i* 100*km/t.*

   Utsagnet er ikke sant: gjennomsnittshastigheten er 100km/t, og sekantsetningen (mean value theorem) sier da at den instantane hastigheten må ha vært 100km/t på et tidspunkt.

2. *Det finnes ett og bare ett tall* $x \in [0, \pi/2]$ *slik at* $\tan x = 17$.

   Utsagnet er sant: da tan er kontinuerlig på $(0, \pi/2)$ og $\tan 0 = 0$, mens $\lim_{x\to\pi/2^-}\tan x = \infty$ sier skjæringssetningen at $\tan x = 17$ for en $x \in (0, \pi/2)$. På den annen side, da den deriverte $d/dx\ \tan x = 1/\cos^2 x$ bestandig er positiv kan det maksimalt være én $x \in (0, \pi/2)$ slik at $\tan x = 17$.

Bjørn Ian Dundas