Løsningsforslag til underveisvurdering i MAT111 vår 2005

Oppgave 1

Beregn grenseverdien

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln x}{x^2-2x+1}$$

Svar: Merk at nevneren er lik $(x-1)^2$, så vi kan forkorte $(x-1)$ oppe og nede og får

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

Dette er et 0 over 0-uttrykk, så vi kan bruke l'Hôpitals regel; altså derivere oppe og nede. Vi får

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = \frac{1/1}{1} = 1$$

Alternativ: Vi kan bruke l'Hôpitals regel direkte, siden vi har et 0 over 0-uttrykk, og får

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + (x-1)\cdot \frac{1}{x}}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1/x}{2x-2}$$

Dette er igjen et 0 over 0-uttrykk, og vi bruker l'Hôpitals regel en gang til:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1/x}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x + 1/x^2}{2} = \frac{1/1+1/1^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Oppgave 2

Uttrykk $\sin(u+2v)$ ved hjelp av $\sin(u), \sin(v), \cos(u)$ og $\cos(v)$.

Svar: Vi bruker først formelen for sinus til summen av to vinkler, og får

$$\sin(u+2v) = \sin(u)\cos(2v) + \cos(u)\sin(2v)$$

Så bruker vi formelen for sinus til den doble vinkel og en av de tre formlene vi har for cosinus til den doble vinkel til å skrive dette uttrykket på en av tre måter:

$$\begin{aligned}
\sin(u+2v) &= \sin(u)\cos(2v) + \cos(u)\sin(2v) \\
&= \sin(u)(\cos^2(v) - \sin^2(v)) + 2\cos(u)\sin(v)\cos(v) \\
&= \sin(u)(2\cos^2(v) - 1) + 2\cos(u)\sin(v)\cos(v) \\
&= \sin(u)(1 - 2\sin^2(v)) + 2\cos(u)\sin(v)\cos(v)
\end{aligned}$$

Oppgave 3

La $f(x) = xe^x$. Beregn P_2, Taylorpolynomet til f av grad to om 0. Bruk P_2 til å gi et overslag for $f(0,1)$. Vis at feilen er mindre enn eller lik $\frac{3,1}{6}e^{0,1} \cdot 0,001$. Ved å bruke estimatet $\frac{3,1}{6}e^{0,1} < 1$ (et ganske grovt estimat; dette estimatet trenger du ikke vise), angi et intervall som du helt sikkert vet at inneholder $f(0,1)$.

Svar: For å gi et fullstendig svar på denne oppgaven trenger vi de fire første deriverte til f. Vi beregner f' ved produktregelen, og det er lett å se hvordan de neste deriverte finnes på tilsvarende måte.

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^x + e^x \\ f''(x) &= xe^x + 2e^x \\ f^{(3)}(x) &= xe^x + 3e^x \\ f^{(4)}(x) &= xe^x + 4e^x \end{aligned}$$

Vi trenger verdien til f, f' og f'' i null for å kunne skrive opp Taylorpolynomet P_2; disse er

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0 + e^0 = 1, \quad f''(0) = 0 + 2e^0 = 2$$

Vi får dermed

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 = 0 + 1(x-0) + \frac{2}{2}(x-0)^2 = x + x^2$$

Så overslaget for $f(0,1)$ blir

$$P_2(0,1) = 0,1 + 0,1^2 = 0,11$$

For å finne en begrensning på feilen i dette estimatet bruker vi Lagranges restledd; det finnes et tall X mellom a og x slik at feilen i estimatet er

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(X)}{6}(x-a)^3$$

Vi setter inn våre verdier og finner

$$E_2(0,1) = \frac{f^{(3)}(X)}{6}(0,1-0)^3 = \frac{Xe^X + 3e^X}{6} \cdot 0,001$$

Siden $f^{(3)}$ og $f^{(4)}$ er positive på intervallet $[0,\ 0,1]$, vet vi at feilen er begrenset av verdien for $X = 0,1$; dette maksimerer (absolutt)verdien av uttrykket for E_2 mellom 0 og $0,1$. Vi setter inn $X = 0,1$ og får

$$|E_2(0,1)| \leq \frac{0,1e^{0,1} + 3e^{0,1}}{6} \cdot 0,001 = \frac{3,1}{6}e^{0,1} \cdot 0,001$$

Vi bruker så det gitte estimatet $\frac{3,1}{6}e^{0,1} < 1$ til å finne

$$|E_2(0,1)| \leq \frac{3,1}{6}e^{0,1} \cdot < 0,001$$

og dermed

$$f(0,1) \in (0,11 - 0,001,\ 0,11 + 0,001) = (0,109,\ 0,111)$$

Dette er et fullgodt svar for oss i dette kurset. Men det kan forbedres noe, ved å merke at uttrykket for feilen også har en *minimumsverdi*, og at det er positivt hele tiden. Minimumsverdien finner vi (analogt til hvordan vi fant maksimumsverdien) ved å sette inn det venstre endepunktet, nemlig $X = 0$. Dermed er

$$E_2(0,1) \geq \frac{3 \cdot e^0}{6} \cdot 0,001 = 0,0005$$

Vi finner dermed

$$f(0,1) \in [0,11 + 0,0005,\ 0,11 + 0,001) = [0,1105,\ 0,111)$$

Men dette siste kreves ikke for å få full uttelling på oppgaven.

Oppgave 4

La $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.

a) Finn f' og f''. Tegn fortegnsdiagram. Finn eventuelle nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter for f.

b) Bruk informasjonen du har funnet i a) til å skissere grafen til f.

Svar: Vi deriverer to ganger:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9, \quad f''(x) = 6x + 12$$

La oss først finne nullpunktene til f' (de kritiske punktene, inkluderer topp- og bunnpunkter) og nullpunktene til f'' (dette inkluderer eventuelle vendepunkter). Vi finner nullpunktene til f' ved å bruke formelen for løsning av annengradsligningen:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = -3$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

Vi sjekker også funksjonsverdien i disse tre punktene:

$$f(-3) = 4,\ f(-2) = 2,\ f(-1) = 0$$

Nå fant vi også et nullpunkt! Siden $f(-1) = 0$ kan vi dele f på $x + 1$; dette gir

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 5x + 4)$$

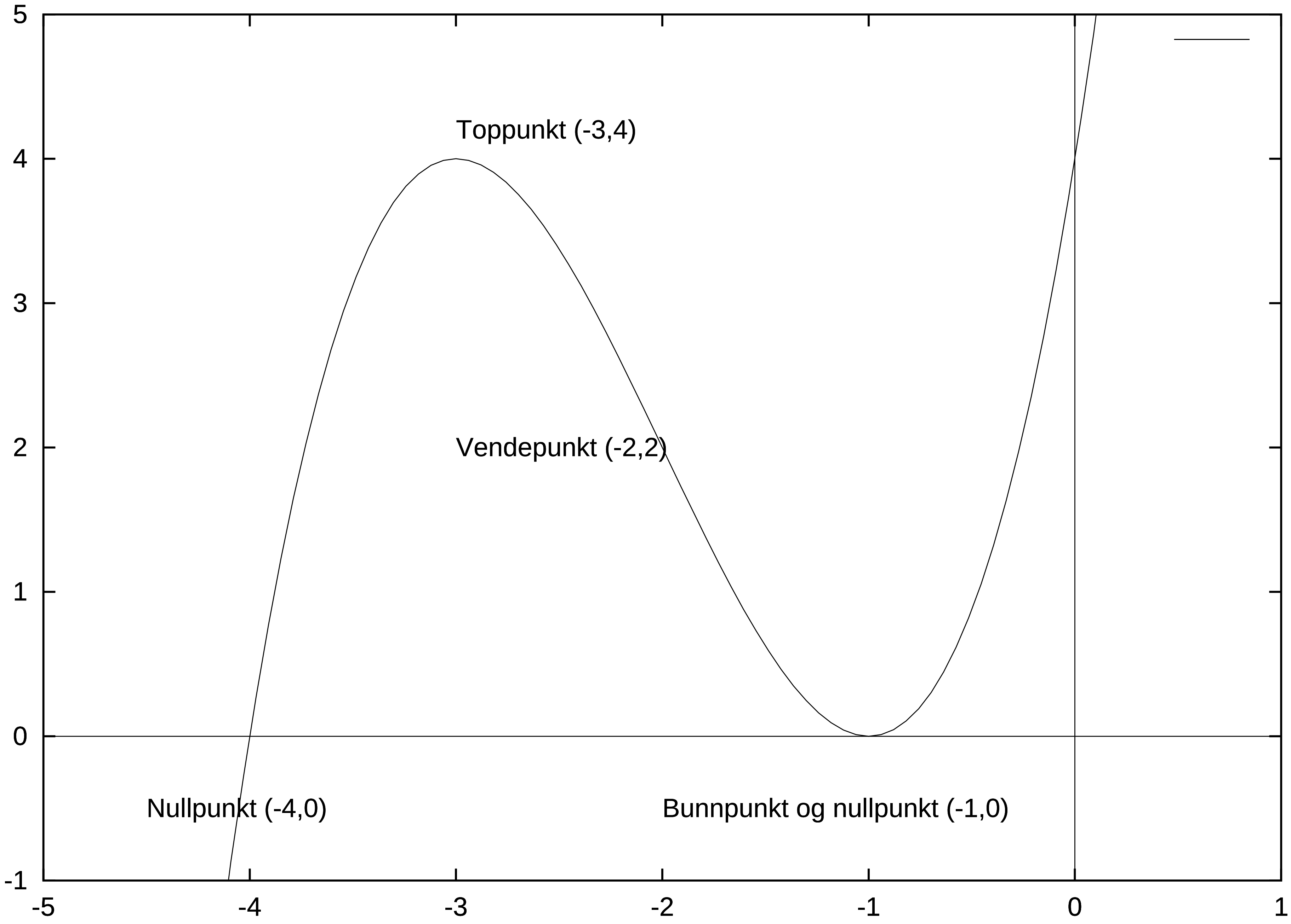
Vi finner eventuelle andre nullpunkter ved å sette annengradsuttrykket over inn i formelen for annengradsligningen; dette gir løsningene $x = -1$ og $x = -4$, altså ett nytt nullpunkt.

For å finne ut om punktene vi har funnet faktisk gir ekstremalpunkter (eller vendepunkter), må vi vite om f' (eller f'') skifter fortegn; det finner vi fra fortegnsdiagrammet. Fra fortegnsdiagrammet får vi også vite hvor f stiger og synker, og hvilken konkavitet f har.

	—	-3	—	-2	—	-1	—
f'	+++	0	- - -	-	- - -	0	+++
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$
f"	- -	-	- -	0	++	+	++
f	$\cap$		$\cap$		$\cup$		$\cup$

Spesielt ser vi at -3 er et toppunkt, -1 et bunnpunkt og -2 et vendepunkt.

Til slutt bruker vi all denne informasjonen til å tegne grafen til f. Det er også praktisk å ta med verdien i $x = 0$; $f(0) = 4$.


Toppunkt (-3,4)
Vendepunkt (-2,2)
Nullpunkt (-4,0)
Bunnpunkt og nullpunkt (-1,0)
5
4
3
2
1
0
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1

Oppgave 5

Beregn følgende bestemte og ubestemte integraler:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx$

b) $\int e^x \sin x \, dx$ (hint: bruk delvis integrasjon to ganger.)

Svar: a) Denne oppgaven kan løses på flere måter; ved å transformere uttrykket først, ved substitusjon (på to måter), eller ved delvis integrasjon (på to måter). For å ta det første først; vi har $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$, og dermed får vi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx &= \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2x) \, dx = \tfrac{1}{2} \big(\tfrac{-\cos(2x)}{2}\big)\big|_0^{\pi/2} \\ &= (-\tfrac{1}{4}(\cos \pi - \cos 0) = -\tfrac{1}{4}(-1-1) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Alternativ: La $u = \sin x$. Da er $du = \cos x \, dx$, og vi får

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C$$

Vi kan nå enten substituere inn de nye grensene $x = 0 \Rightarrow u = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$ for å få

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} u^2 |_0^1 = \frac{1}{2}$$

eller sette tilbake $\sin(x)$ for u og få

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, dx &= \tfrac{1}{2} u^2 |_{x=0}^{x=\pi/2} = \tfrac{1}{2} \sin^2(x)|_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{1}{2}(\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)) = \tfrac{1}{2}(1-0) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Alternativ: La $u = \cos x$, da er $du = -\sin x \, dx$ og regningen blir som over, men med cosinus, ikke sinus.

Alternativ: La $U = \sin x$, $V' = \cos x$. Da er $U' = \cos x$ og $V = \sin x$. Ved delvis integrasjon finner vi

$$\int \sin x \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \sin x \, dx$$

Vi kan legge til $\int \sin x \cos x \, dx$ på begge sider, og dele på to, for å få

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$$

Så må grensene settes inn som over.

Alternativ: La $U = \cos x$, $V' = \sin x$. Regningen blir som over, men med cosinus, ikke sinus.

Svar: b) Vi skal bruke delvis integrasjon to ganger. La først $U = \sin x$, $V' = e^x$. Da er $U' = \cos x$ og $V = e^x$. Vi får

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Vi bruker igjen delvis integrasjon på det siste integralet, med $u = \cos x$, $v' = e^x$ som gir $u' = -\sin x$, $v = e^x$. Så

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

Vi setter dette inn i vårt opprinnelige uttrykk, og får

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx)$$

Legg til $\int e^x \sin x \, dx$ på begge sider, og del på 2, da ender vi opp med

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C$$

Alternativt kan vi bruke $U = e^x$, $V' = \sin x$; da må vi også passe på å derivere e^x når vi bruker delvis integrasjon for annen gang. Regningen blir ellers som før.

Oppgave 6

La f være en funksjon som er to ganger deriverbar på intervallet $[0, 1]$. Avgjør om følgende utsagen er sanne. Gi en kort begrunnelse for svaret.

a) f har et maksimum på $[0, 1]$.
b) Hvis $0 < c < 1$ og c er et maksimum for f, så er $f''(c) < 0$.
c) Hvis $f(0) = f(1)$ så finnes et punkt c mellom 0 og 1 slik at f har en horisontal tangent i c.

Svar: a) er sann. Siden f er deriverbar, er f også kontinuerlig. Ved Max/min-teoremet har alle kontinuerlige funksjoner på lukkede intervaller et maksimum.

b) er ikke sann. Det vi vet er at hvis c er et kritisk punkt, vil $f''(c) > 0$ bety at c er et minimumspunkt, og at hvis $f''(c) < 0$ er c et maksimumspunkt. Hvis $f''(c) = 0$ kan det være enten et maksimum, et minimum eller et vendepunkt. For å gi et eksplistt moteksempel til b), se på funksjonen $-(x - 1/2)^4$. Den har maksimum i $x = 1/2$, men den dobbeltderiverte er null i $1/2$.

c) er sann. Dette er Rolles teorem.

Jon Eivind Vatne