Løsningsforslag: Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag desember 18, 2006, kl. 09-14.

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = \ln(\frac{x^2}{2} - 3x + 5)$

a) *Finn eventuelle nullpunkt til f. Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende og finn eventuelle ekstremalpunkt.*

Svar: Merk: $\frac{x^2}{2} - 3x + 5 = \frac{1}{2}((x-3)^2 + 1) > 0$ for alle x. Dvs f er veldefinert for alle x.

$f(x) = 0$ for $\frac{x^2}{2} - 3x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ eller $x = 4$

$f'(x) = \frac{x-3}{\frac{x^2}{2} - 3x + 5}$. f avtagende for $f'(x) < 0$; og siden nevneren alltid er positiv skjer det for $x < 3$. Tilsvarende f voksende for $f'(x) > 0$; $x > 3$.

f har absolutt (globalt) minimumspunkt $(3, -\ln 2)$.

b) *Finn likningen for normalen til grafen til f i punktet $(1, f(1))$.*

Svar: $f(1) = \ln(5/2)$, $f'(1) = -4/5$. Stigningstallet til normalen er $a = -1/f'(1) = 5/4$. Innsatt i etpunktsformelen for en rett linje får vi at likningen til normalen blir:

$$y = 5/4(x - 1) + ln(5/2)$$

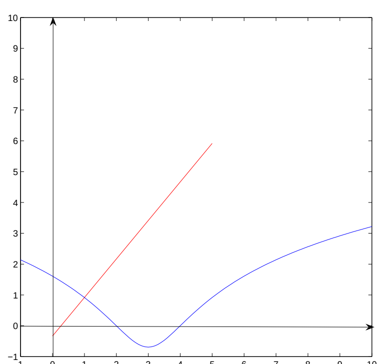
c) *Finn $f''(x)$, bestem konkavitet og eventuelle vendepunkt.*

Svar: Deriverer, faktoriserer og får:

$$f''(x) = \frac{-1}{2} \frac{(x-2)(x-4)}{(\frac{x^2}{2} - 3x + 5)^2}$$

Siden nevner er positiv har vi $f''(x) < 0$ og f konkav ned for $x < 2$ og $x > 4$, mens $f''(x) < 0$ og f konkav opp for $2 < x < 4$. f har vendepunkt for $x = 2$ og $x = 4$.

d) *Skisser grafen til f.*



Oppgave 2

Bestem disse grenseverdiene

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

b) Ubestemt form av typen $[0/0]$. Bruker L'Hopitals 1. regel.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x-2}=-\frac{1}{2}$$

c) 0^0 - type. La $y=(\sin x)^x$ og se på

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\ln\sin x^x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin x)}{1/x},$$

som er $[\frac{0}{0}]$ og tillater bruk av l'Hopitals 1. regel.

$$\lim_{x\to 0+}\ln y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}-\frac{x^2\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0+}-\frac{2x\cos x-x^2 sinx}{\cos x}=0$$

Dvs

$$\lim_{x\to 0+}y=\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x=e^0=1.$$

Oppgave 3

a) *Regn ut integralene*

$$1)\quad\int\frac{x^3+x^2-5x-15}{x^2-9}dx$$

Svar: Polynomdivisjon gir

$$\int\frac{x^3+x^2-5x-15}{x^2-9}dx=\int(x+1+\frac{4x-6}{x^2-9})dx$$

Bruker delbrøkoppspalting

$$\frac{4x-6}{x^2-9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+B)x-3(A-B)}{x^2-9}$$

Sammenligning av koeffisientene gir likningene:

$$\begin{aligned}A+B&=4\\-3(A-B)&=-6\end{aligned}$$

som har løsningen $A=3;\ B=1$. Dermed har vi:

$$\int\left(x+1+\frac{3}{x+3}+\frac{1}{x-3}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$$

$$2) \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Den siste integranden kjenner vi igjen som den deriverte til $\sin^{-1} x$. For den første prøver vi substitusjonen $u = 1-x^2$; $\Rightarrow -du/2 = xdx$ og dermed har vi

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int -\frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}$$

Som gir oss:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} + \sin^{-1} x + C$$

b) *Avgjør om det uegentlige integralet*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \ln x}dx$$

konvergerer eller divergerer.

Svar: Her må strategien være å sammenligne med en enklere integrand (Theorem 3, kap 6). Flere muligheter eksisterer. Vi vil bruke at $x/2 > \ln x$ for $x > 1$. (Det ser vi slik: $h(x) = x/2 - \ln x$ har minverdi $1 - \ln 2 > 0$ for $x = 2$). For $x \geq 1$ har vi da: $0 < x^2 - x/2 < x^2 - \ln x$ og følgelig $0 < \frac{1}{x^2 - \ln x} < \frac{1}{x^2 - x/2}$.

Siden integranden er positiv i hele integrasjonsområdet har vi:

$$\begin{aligned}
0 < \int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \ln x}dx &< \int_1^\infty \frac{1}{x^2 - x/2}dx \\
&= \int_1^\infty \left(\frac{4}{2x-1} - \frac{2}{x}\right) dx \qquad \text{delbrøksoppspalting} \\
&= 2\ln(2x-1) - 2\ln x\Big|_1^\infty = 2\ln \frac{2x-1}{x}\Bigg|_1^\infty \\
&= 2(\lim_{x\to\infty} \ln \frac{2x-1}{x} - \ln 1) = 2\ln 2
\end{aligned}$$

som viser at dette uegentlige integralet konvergerer.

Oppgave 4

Løs differensiallikningene

a)

$$y' + (\sin x)y = \sin x; \qquad y(0) = 0$$

Svar: Denne diff. likningen kan løses både som separabel likning og linear 1. ordens.

i) Som separabel likning:
Skriv likningen slik

$$\frac{y'}{1-y} = \sin x$$

og integrer begge sider m.h.p x

$$\int \frac{y'dx}{1-y} = \int \frac{dy}{1-y} = \int \sin x dx$$

enkel integrasjon gir

$$-\ln|1-y| = -\cos x + C$$

Innsatt for $y(0) = 0$ gir C=1, og vi har

$$|1-y| = e^{\cos x - 1}$$

Da har vi 2 kandidater til løsningen

$$y_1 = 1 - e^{1-\cos x} \qquad y_2 = 1 + e^{1-\cos x}$$

Ved innsetting ser vi at bare y_1 tilfredstiller den opprinnelige likningen.

ii) Som 1.ordens lineær likning:
Vi trenger integrerende faktor $e^{\mu(x)}$, der $\mu(x) = \int \sin x dx = -\cos x$. Multipliserer med integrerende faktor og får:

$$\begin{aligned}
y' + (\sin x)y &= \sin x \\
e^{-\cos x}y' + (\sin x)e^{-\cos x}y &= \sin x e^{-\cos x} \\
\frac{d}{dx}(e^{-\cos x}y) &= \sin x e^{-\cos x} \\
e^{-\cos x}y &= \int \sin x e^{-\cos x} dx \\
y &= e^{\cos x}(e^{-\cos x} + C)
\end{aligned}$$

Integralet på høyreside handteres lett med substitusjonen $u = -\cos x$. $y(0) = 0$ gir $C = -e^{-1}$, som gir oss

$$y = 1 - e^{\cos x - 1}$$

b)

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2\ln x - 1}{x}; \qquad y(1) = \frac{1}{8}$$

Svar:
1. ordens lineær likning. Integrerende faktor

$$e^{\int(-2/x)dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$$

Multipliserer med denne og får:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y &= \frac{2\ln x - 1}{x^3} \\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) &= \frac{2\ln x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\
\frac{1}{x^2}y &= \int \frac{2\ln x}{x^3}dx - \int \frac{1}{x^3}dx \\
\frac{1}{x^2}y &= -\frac{1}{x^2}\ln x + \int \frac{1}{x^3}dx - \int \frac{1}{x^3}dx \\
\frac{1}{x^2}y &= -\frac{1}{x^2}\ln x + C \\
y &= -\ln x + Cx^2
\end{aligned}$$

Her har vi brukt delvis integrasjon på det første integralet, og blitt belønnet med flaks. Som vi ser, det nye integralet som dukker opp kanselerer det som er der fra før. Initalverdiene gir $C = 1/8$ og svaret blir

$$y = -\ln x + \frac{x^2}{8}$$

Oppgave 5

Bare de elementære regneoperasjonene, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon blir beregnet direkte av datamaskinen. For mer avanserte regneoperasjoner som utregning av kvadratrøtter trengs algoritmer som kun gjør bruk av de elementære operasjonene.

Den vanlige metoden som brukes for å finne kvadratroten til et positivt tall, a, er å finne den positive roten til likningen

$$f(x) = x^2 - a = 0 \tag{1}$$

ved Newtons metode. I denne oppgaven skal vi studere hvordan dette kan gjøres:

a) *Vis at Newtons metode brukt på (1) gir følgen*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{2}$$

Svar: Newtons metode er gitt ved $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ og med $f'(x) = 2x$ har vi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

b) *Definer feilen i steg n ved $e_n = x_n - \sqrt{a}$ og vis at*

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n}$$

Vis så at om $x_n > \sqrt{a}$ vil $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$. Hvorfor kan du nå konkludere med at metoden konvergerer om vi starter med $x_0 \geq \sqrt{a}$?

Svar:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} = \frac{e_n^2}{2x_n}$$

Med $x_n > \sqrt{a} > 0$ har vi $0 < e_n = x_n - \sqrt{a} < x_n$ som gir

$$0 < e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n} = \frac{e_n(x_n - \sqrt{a})}{2x_n} < \frac{e_n x_n}{2x_n} = \frac{e_n}{2}$$

og med $x_0 > \sqrt{a}$ følger der ved induksjon at $0 < e_{n+1} < e_n$ for alle $n > 0$. Dermed er følgen nedad begrenset og monotont avtagende og da vet vi at den konvergerer.

c) *For konvergens må vi ha en startverdi som tilfredstiller $x_0 \geq \sqrt{a}$.*

La $g(t) = \sqrt{t}$, og la $P_1(t)$ være 1. ordens, Taylor-polynom for $g(t)$ om 1. Vis at da vil $x_0 = P_1(a)$ tilfredsstille dette kravet for alle $a > 0$. (Hint: Studer feilleddet til P_1)

Svar: Feilleddet til 1. ordens, Taylor-polynom for $g(t)$ om $t = 1$ er gitt ved:

$$E_1(t) = g(t) - P_1(t) = \frac{g''(s)}{2}(t-1)^2$$

Vi har $g''(s) = -\frac{1}{4}s^{-3/2} < 0$ for alle $s > 0$. Altså er $E_1(t) < 0$ som medfører $P_1(t) > g(t)$.

Per Manne Tor Sørevik