Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 18. desember, 2006, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemidler: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Alle svar skal begrunnes. Ta med så mange mellomregninger at framgangsmåten tydelig framgår av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = \ln(\frac{x^2}{2} - 3x + 5)$

a) Finn eventuelle nullpunkt til f. Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende og finn eventuelle ekstremalpunkt.

b) Finn likningen for normalen til grafen til f i punktet $(1, f(1))$.

c) Finn $f''(x)$, bestem konkavitet og eventuelle vendepunkt.

d) Skisser grafen til f.

Oppgave 2

Bestem disse grenseverdiene

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$ **b)** $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x^2 - 2x}$ **c)** $\lim_{x\to 0+}(\sin x)^x$

Oppgave 3

a) Regn ut integralene

$$1)\ \int \frac{x^3 + x^2 - 5x - 15}{x^2 - 9}dx \qquad 2)\ \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

b) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \ln x}dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 4

Løs differensiallikningene

a)

$$y' + (\sin x)y = \sin x; \qquad y(0) = 0$$

b)

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{2\ln x - 1}{x}; \qquad y(1) = \frac{1}{8}$$

Oppgave 5

Bare de elementære regneoperasjonene, addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon blir beregnet direkte av datamaskinen. For mer avanserte regneoperasjoner som utregning av kvadratrøtter trengs algoritmer som kun gjør bruk av de elementære operasjonene.

Den vanlige metoden som brukes for å finne kvadratroten til et positivt tall, a, er å finne den positive roten til likningen

$$f(x) = x^2 - a = 0 \tag{1}$$

ved Newtons metode. I denne oppgaven skal vi studere hvordan dette kan gjøres:

a) Vis at Newtons metode brukt på (1) gir følgen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{2}$$

b) Definer feilen i steg n ved $e_n = x_n - \sqrt{a}$ og vis at

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n}$$

Vis så at om $x_n > \sqrt{a}$ vil $\sqrt{a} < x_{n+1} < x_n$. Hvorfor kan du nå konkludere med at metoden konvergerer om vi starter med $x_0 \geq \sqrt{a}$?

c) For konvergens må vi ha en startverdi som tilfredsstiller $x_0 \geq \sqrt{a}$.

La $g(t) = \sqrt{t}$, og la $P_1(t)$ være 1. ordens, Taylor-polynom for $g(t)$ om 1. Vis at da vil $x_0 = P_1(a)$ tilfredsstille dette kravet for alle $a > 0$ (Hint: Studer feilleddet til P_1)

Per Manne   Tor Sørevik