

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskaplege fakultet.
 Eksamen i emnet MAT 111 - Grunnkurs i matematikk I
 Onsdag 24. mai 2006, kl. 09-14.

Tillatne hjelpemiddel: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetet sine reglar. Oppgåvesettet er på 2 sider.

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Grunngi alle svar. Det må vere med nok mellomrekningar til at framgangsmåten kjem tydeleg fram.

Oppgåve 1

Definer to komplekse tal ved $z_1 = 3 - 2i$ og $z_2 = 1 + i$.

- Rekn ut $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ og z_1/z_2 . Teikn z_1 , z_2 , $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ og z_1/z_2 i det komplekse planet.
- Skriv z_2 på polarform. Rekn ut $(z_2)^4$.
- Finn alle dei komplekse løysingane til likninga $z^4 = 16i$, og teikn opp løysingane i det komplekse planet.

Oppgåve 2

La $f(x) = x^2 \ln x$.

- Rekn ut Taylorpolynomet $P_2(x)$ av grad 2 (kvadratisk approksimasjon) til $f(x)$ i punktet $x = 1$.
- La $E_2(x)$ vere restleddet til tilnærminga gitt ved $P_2(x)$ som du har funne over. Gi eit uttrykk for $E_2(x)$.
- Bruk $P_2(x)$ til å rekne ut ein tilnærma verdi for $f(1.5)$. Bruk uttrykket for $E_2(x)$ til å estimere feilen i denne tilnærminga.

Oppgåve 3

Avgjer om følgjande rekkjer konvergerer:

a)

$$i) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2}}{2^n \ln(n+1)}$$

Oppgåve 4

Løys differensiallikninga

$$\frac{dy}{dx} - 4xy = 2xe^{2x^2}$$

med initialkravet $y(0) = 1$.

Oppgåve 5

Rekn ut følgjande grenseverdiar

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x+2} - 2}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x}, \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}$$

Oppgåve 6

Finn likninga for tangentplanet til

$$z = f(x, y) = x^2 \sin y$$

i punktet $(1, \pi/3)$.

Oppgåve 7

Rekn ut følgjande integral

$$a) \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx, \quad b) \int \frac{1}{x^4 - 1} dx, \quad c) \int_{-1}^1 x^3 \exp(-x^2) dx$$

Oppgåve 8

Rekn ut volumet ein får ved å rotere området avgrensa av $x = 0$, $y = 0$ og $y = \exp(-x)$, $0 \leq x < \infty$ om x -aksen. Rekn ut volumet ein får ved å rotere det same området om y -aksen.

Oppgåve 9

Finn den deriverte til

$$f(x) = \int_{\sin x}^{x^2} \exp(u^3) du, \quad x > 1.$$