Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 17. desember 2007, kl. 09-14.

Tillatte hjelpemiddeler: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Alle svar skal begrunnes. Ta med så mange mellomregninger at framgangsmåten tydelig framgår av besvarelsen.

Oppgave 1

Gitt $f(x) = x^3 + x^2 - 1, \qquad -1 \leq x \leq 1.$

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt. Bestem absolutt maksimum og minimum til $f(x)$.

b) Finn eventuelle vendepunkt og avgjør konkaviteten til funksjonen.

c) Finn Taylor-polynomene av 1. orden ($T_1(x)$) og 2.orden ($T_2(x)$) rundt $x = 1$.

d) Vis at $f(x)$ har minst et nullpunkt i intervallet $(0, 1)$. Finn nullpunktet til $T_1(x)$. Vi kan betrakte det som en tilnærming av nullpunktet til $f(x)$. Hvilken iterativ metode for lokalisering av nullpunkt har man nå gjennomført en iterasjon med?

e) Skisser grafen til $f(x)$.

Oppgave 2

Bestem disse grenseverdiene:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^{2x+1}$

Oppgave 3

Regn ut:

a) $\displaystyle\int x^3 \cos(x^2) dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + x} dx.$

Oppgave 4

Gitt et område avgrenset av funksjonen $f(x) = e^{2x}$, $x-$aksen, samt $x = 0$ og $x = Z$, der Z kan være positiv eller negativ.

a) Finn arealet, A, til dette området bestemt ved Z. Hva må Z være dersom $A = 5$?

b) Hvor stort må arealet A være for at Z skal være entydig bestemt?

Oppgave 5

Løs differensialligningene:

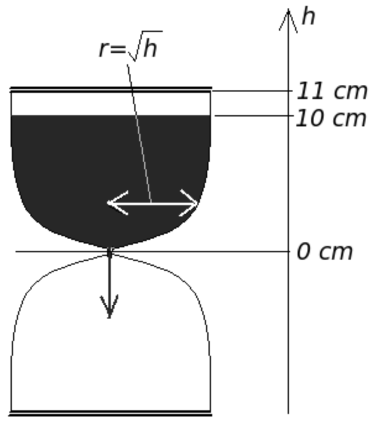
a) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 1}{2y}, \qquad y(0) = -3.$

b) $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} + e^{x^3}, \qquad y(1) = 0.$

Oppgave 6

Du har et timeglass som består av to identiske glass, forbundet med et tynt rør som vann kan renne gjennom. Hvis alt vannet er i det ene glasset, og timeglasset snus, vil alt vannet renne ned i det nedre glasset på fem minutter. Vi antar at vannet renner med konstant fart hele tiden, slik at volum av vannet i øvre glass blir en lineær funksjon av tiden t.

Hvert av glassene er paraboloideformet, med en radius ved høyde h gitt av $r = \sqrt{h}$. Idet timeglasset blir snudd og alt vannet er i det øvre glasset, vil overflaten være 10 cm over utløpsrøret. Hvert av glassene har en høyde på 11 cm (se figuren).



a) Hva er volumet $V(t)$ av vannet i øvre glass ved tid t $(0 \leq t \leq 5)$?

b) Vannglasset snus ved $t = 0$. Vis at vannstanden v som en funksjon av tiden t er gitt ved

$$v(t) = \sqrt{-20t + 100}.$$

Du skal sette et merke på det øvre glasset for å markere vannivået når det kun gjenstår et minutt før det øvre glasset er tomt. Hvor på glasset skal dette merket plasseres?

c) Etter alt vannet har rent ned i det nedre glasset, hvor langt er det mellom vannoverflaten og toppen av dette glasset?

Tor Sørevik | Sigvat K. Stensholt | Per Manne