Universitetet i Bergen
Matematisk institutt

Bokmål

Løsningsforslag til eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 17. desember 2007, kl. 09-14.

Oppgave 1

Gitt $f(x) = x^3 + x^2 - 1, \qquad -1 \le x \le 1.$

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt. Bestem absolutt maksimum og minimum til $f(x)$.

Løsning: $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$, *kritiske punkt er dermed ved* $x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{23}{27}$ *og* $x = 0, y = -1$. $f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f''(-\frac{2}{3}) = -2 < 0, f''(0) = 2 > 0$, *dermed er* $(-\frac{2}{3}, -\frac{23}{27})$ *et maksimum, mens* $(0, -1)$ *er minimum.*

Kandidater for absolutt maksimum er singulære punkt (finnes ikke for $f(x)$*), endepunktene* $(-1, -1)$ *og* $(1, 1)$*, og de kritiske punktene. Det er "delt førsteplass" om å være absolutt minimum mellom* $(-1, -1)$ *og* $(0, -1)$*, begge disse punktene er absolutt minimum. Høyre endepunkt* $(1, 1)$ *er absolutt maksimum.*

b) Finn eventuelle vendepunkt og avgjør konkaviteten til funksjonen.

Løsning: $f''(x) = 6x + 2$, *mulig vendepunkt ved* $x = -\frac{1}{3}$, *bekreftes som vendepunkt av at* $f'''(-\frac{1}{3}) = 6 \neq 0.a$
$f''(x) < 0$ *(konkav ned) for* $x < -\frac{1}{3}$,
$f''(x) > 0$ *(konkav opp) for* $x > -\frac{1}{3}$.

c) Finn Taylor-polynomene av 1. orden ($T_1(x)$) og 2.orden ($T_2(x)$) rundt $x = 1$.

Løsning: $f(1) = 1$, $f'(1) = 5$, $f''(1) = 8$. *Dermed er* $T_1(x) = 1 + 5(x-1) = 5x - 4$; $T_2(x) = 1 + 5(x-1) + 4(x-1)^2 = 4x^2 - 3x$.

d) Vis at $f(x)$ har minst et nullpunkt i intervallet $(0, 1)$. Finn nullpunktet til $T_1(x)$. Vi kan betrakte det som en tilnærming av nullpunktet til $f(x)$. Hvilken iterativ metode for lokalisering av nullpunkt har man nå gjennomført en iterasjon med?

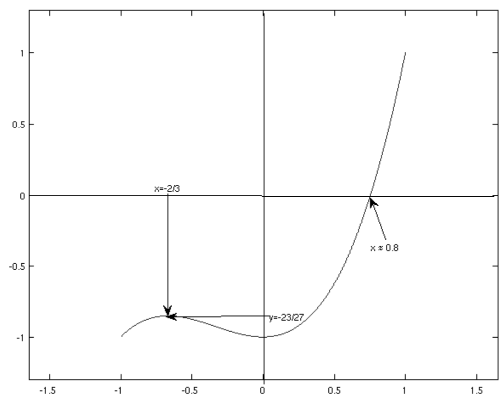
Løsning: $f(x)$ *er kontinuerlig på* $0 < x < 1$, *og* $f(0) = -1$ *og* $f(1) = 1$ *har motsatt fortegn, da følger det av skjæringssetningen at der er minst et nullpunkt på* $0 < x < 1$.

Nullpunktet til $T_1(x)$: $T_1(x) = 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$.
Setter vi $T_1(x) = 0$ får vi:

$$\begin{aligned} f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) &= 0 \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

som vi gjenkjenner som Newton-Raphsons metode.

e) Skisser grafen til $f(x)$.



Oppgave 2

Bestem disse grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}}$,

Løsning: Faktoriserer og forenkler:

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - 3}} = \lim_{x\to 3} \sqrt{\frac{(x+2)(x-3)}{x - 3}} = \lim_{x\to 3} \sqrt{x + 2} = \sqrt{5}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$,

Løsning: Både teller og nevner deriverbar om $x = 1$. Bruker L'Hopitals 1. regel:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

c) $\lim_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x+1})^{2x+1}$

Løsning: Setter $L=(1-\frac{1}{x+1})^{2x+1}$ *og tar* $\ln$ *på begge sider. Da er*

$$\lim_{x\to\infty}\ln L=\lim_{x\to\infty}(2x+1)\ln(\frac{x}{x+1}).$$

Bruker L'Hopitals 2. regel og får videre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln L &= \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{-2x(x+1)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{8x+4}{-4x-2}\\ &= -2.\end{aligned}$$

Da er $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+1})^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}L=e^{-2}$.

Oppgave 3

Regn ut:

a) $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)dx,$

Løsning: Substitusjon $u=x^2\Rightarrow\frac{du}{dx}=2x$. *Gir integralet* $\frac{1}{2}\int u\cos u du$. *Denne kan løses med delvis integrasjon, og etterfulgt av tilbakesubstitusjon får vi:*

$$\int x^3\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\int u\cos u du=\frac{1}{2}(\cos u+u\sin u+C)=\frac{1}{2}(\cos x^2+x^2\sin x^2+C).$$

b) $\displaystyle\int\frac{2x^2+x+2}{x^3+x}dx.$

Løsning: Delbrøksoppspalting: $\frac{2x^2+x+2}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$.
Finner at $A=2,B=0,C=1$, *dermed blir integralet*

$$\int\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2+1}dx=2\ln|x|+\arctan x+C.$$

Oppgave 4

Gitt et område avgrenset av funksjonen $f(x) = e^{2x}$, $x-$aksen, samt $x = 0$ og $x = Z$, der Z kan være positiv eller negativ.

a) Finn arealet, A, til dette området bestemt ved Z. Hva må Z være dersom $A = 5$?

Løsning: For $Z < 0$ er arealet gitt av

$$\int_Z^0 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{2Z}).$$

For $Z > 0$ er arealet gitt av

$$\int_0^Z e^{2x} dx = \frac{1}{2}(e^{2Z} - 1).$$

Med $A = 5$ og $Z < 0$ trenger vi løsning til $\frac{1}{2}(1 - e^{2Z}) = 5 \Leftrightarrow e^{2Z} = -9$, som ikke finnes for $Z \in \mathbb{R}$).
Dersom $Z > 0$ løser vi $e^{2Z} - 1 = 10$, som har løsningen $Z = \frac{1}{2} \ln 11$.

b) Hvor stort må arealet A være for at Z skal være entydig bestemt?

Løsning: Merker oss at $f(x) > 0$. Dermed er A monotont økende når $|Z|$ øker. Derfor finnes det maksimalt en løsning for $Z < 0$, og en løsning for $Z > 0$.

For $Z > 0$ kan arealet bli vilkårlig stort, det er for $Z < 0$ at maksimalt areal er endelig. For å finne maksimalt areal på venstre side bruker vi at A er monotont økende når $Z \to -\infty$ Dermed eksisterer løsningen for $Z < 0$ bare om $A < \lim_{Z \to -\infty} A = \frac{1}{2}$.

Oppgave 5

Løs differensialligningene:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 1}{2y}, \qquad y(0) = -3.$

Løsning: Separabel differensialligning.

$$\int 2y \; dy = \int (4x - 1) \; dx.$$

$$y^2 = 2x^2 - x + C$$

$$y = \pm\sqrt{2x^2 - x + C}.$$

For å oppfylle initialkravet må man bruke det negative svaret, og sette $C = 9$.

$$y(x) = -\sqrt{2x^2 - x + 9}$$

.

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y}{x} + e^{x^3}, \qquad y(1) = 0.$

Løsning: Lineær differensialligning. Integrerende faktor er

$$e^{\int \mu(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2.$$

Dette gir

$$\frac{d}{dx}(x^2 y) = x^2 e^{x^3}.$$

Integrerer og får

$$x^2 y = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Her har vi brukt substitusjonen $u = x^3$. Dermed er generell løsning

$$y(x) = \frac{e^{x^3} + C'}{3x^2},$$

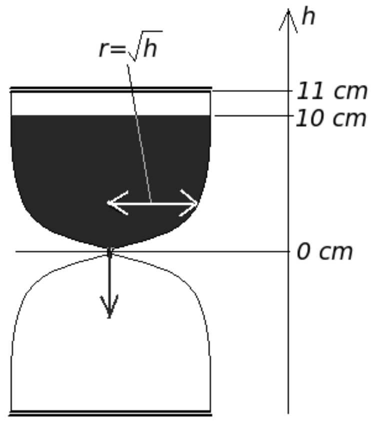
der $C' = 3C$. For å oppfylle initialkravet må $C' = -e$.
Endelig svar blir dermed

$$y(x) = \frac{e^{x^3} - e}{3x^2}.$$

Oppgave 6

Du har et timeglass som består av to identiske glass, forbundet med et tynt rør som vann kan renne gjennom. Hvis alt vannet er i det ene glasset, og timeglasset snus, vil alt vannet renne ned i det nedre glasset på fem minutter. Vi antar at vannet renner med konstant fart gjennom hele denne tiden, slik at volum av vannet i øvre glass blir en lineær funksjon av tiden t.

Hvert av glassene er paraboloideformet, med en radius ved høyde h gitt av $r = \sqrt{h}$. Idet timeglasset blir snudd og alt vannet er i det øvre glasset, vil overflaten være 10 cm over utløpsrøret. Hvert av glassene har en høyde på 11 cm (se figuren).



a) Hva er volumet $V(t)$ av vannet i øvre glass ved tid t $(0 \leq t \leq 5)$?

Løsning: Timeglasset er et omdreiningslegemet beskrevet av funksjonen $r = \sqrt{h}$. *For å finne volumet ved vannstand* v, *må vi integrerere*

$$V(v) = \int_0^v \pi r^2 dh = \int_0^v \pi h dh = \frac{\pi v^2}{2}.$$

At volumet er en lineær funksjon i t *betyr at det kan skrives* $V(t) = At + B$. *Ved* $t = 0$ *er* $v = 10$ *og vannstanden* $V(0) = 50\pi$. *Vi har også oppgitt at* $V(5) = 0$, *som gir oss 2 enkle ligninger for* A *og* B. *Løser disse, setter inn og får:*

$$V(t) = -10\pi t + 50\pi.$$

b) Vannglasset snus ved $t = 0$. Vis at vannstanden v som en funksjon av tiden t er gitt ved

$$v(t) = \sqrt{-20t + 100}.$$

Du skal sette et merke på det øvre glasset for å markere vannivået når det kun gjenstår et minutt før det øvre glasset er tomt. Hvor på glasset skal dette merket plasseres?

Løsning: Om vi gjør den rimelige antagelsen at både v *og* V *er positive størrelser blir* V *entydig og den inverse funksjonen* $v(V)$ *eksisterer.*

$$V(v) = \frac{\pi}{2} v^2 \Rightarrow v(V) = \sqrt{\frac{2V}{\pi}}$$

Setter inn $V(t) = -10\pi t + 50\pi$ *fra oppgave a) og får*

$$v(t) = \sqrt{-20t + 100}.$$

Med et minutt igjen er $t = 4$, *setter derfor inn* $t = 4$, *og får* $\sqrt{20}$, *eller ca. 4.5 cm over utløpsrøret.*

c) Etter alt vannet har rent ned i det nedre glasset, hvor langt er det mellom vannoverflaten og toppen av dette glasset?

Løsning: Volumet av hele glasset er $V(v = 11) = \frac{121\pi}{2}$*, volumet av vannet er* 50π*, så volumet av luft er* $\frac{21\pi}{2}$*.* $v(V) = \sqrt{\frac{2V}{\pi}}$*, gir* $v = \sqrt{21} \approx 4.6$ *cm fra vannoverflaten til toppen av glasset.*