Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 23. mai, 2007, kl. 09-14.

Oppgave 1

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

a) *Vis at $f(x)$ er kontinuerlig for $x = 0$.*

Svar:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = f(0)$$

som viser at $f(x)$ tilfredstiller Def 4, side 77.

b) *Finn et uttrykk for $f'(x)$. Eksisterer $f'(0)$?*

Svar: For $x \neq 0$ har vi:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \tan x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x}$$

$f'(0)$ eksisterer om $\lim_{x\to 0} f'(x)$ eksisterer. Denne grenseverdien er av "$\left[\frac{0}{0}\right]$-typen". Bruker l'Hopitals-regel 2 ganger.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{2x\cos^2 x + 2x^2 \sin x \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{2x\cos^2 x + x^2 \sin 2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 4\sin x\cos x + 2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} \\
&= \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

Underveis har vi brukt $\sin^2 x + \cos^x = 1$ og $2\sin x\cos x = \sin 2x$ for å forenkle uttrykk.

c) *Finn likningen for tangenten til $f^{-1}(y)$ i punktet $(y, f^{-1}(y)) = (4/\pi, \pi/4)$.*

Svar: Stigningstallet til tangent er:

$$a = \frac{d}{dy} f^{-1}(y)\bigg|_{y=4/\pi} = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=\pi/4} == \frac{(\pi/4)^2\cos^2(\pi/4)}{\pi/4 - \sin(\pi/4)\cos(\pi/4)} = \frac{\pi^2}{8\pi^2 - 16}$$

og etpunkts formelen gir:

$$x = \frac{\pi^2}{8\pi^2 - 16} y + \frac{\pi^2 - 4\pi}{4\pi - 8}$$

Oppgave 2

Finn disse grenseverdiene

a) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - \frac{x^2}{x - 2} \right)$

Svar:

a) "$\left[\frac{0}{0}\right]$-typen". Bruker l'Hopitals-regel:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

b) "$[\infty - \infty]$ typen". Omformer uttrykket

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - \frac{x^2}{x - 2} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^2(x+2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{1 - 4/x^2} = -2$$

Oppgave 3

Gitt $f(x) = e^{-x^2}$

a) *Finn $P_2(x)$, Taylor polynom av grad 2 og tilhørende feilledd til $f(x)$ om $x = 0$.*
Svar:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-x^2} & f(0) = 1 \\ f'(x) = -2xe^{-x^2} & f'(0) = 0 \\ f''(x) = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} & f''(0) = -2 \\ f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2} & f'''(0) = 0 \end{array}$$

som gir:

$$P_2(x) = f(0) + x * f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) = 1 - x^2$$

med feilledd

$$E_2(x) = \frac{(6s - 2s^3)e^{-s^2}}{3} x^3; \ s \in int(0, x)$$

b) *Finn en tilnærming til $\int_0^1 f(x)dx$ ved å regne ut $\int_0^1 P_2(x)dx$*
Svar:

$$\int_0^1 P_2(x)dx = \int_0^1 1 - x^2 dx = (x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

c) *Feilen i tilnærmingen, $|\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 P_2(x)dx|$ er omlag 0.08. Hvor liten må delintervall lengden, h, være for at vi skal få en bedre tilnærming til*

$\int_0^1 f(x)dx$ *ved å benytte Trapesregelen?*
Svar: Feilen i trapesregelen oppad begrenset ved:

$$E_T \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

der $[a, b]$ er integrasjonsgrensene, $K = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ og n antall delintervaller. Siden $f'''(x) > 0$ på $(0, 1)$ tar $f''(x)$ sine ekstremalverdier i endepunktene. $K = \max(|f(0)|, |f(1)|) = \max(2, 2e^{-1}) = 2$. Dermed har vi:

$$\begin{aligned} \frac{2(1-0)^3}{2n^2} &\leq 0.08 \\ n^2 &\geq \frac{1}{0.48} \\ n &\geq 2 \end{aligned}$$

M.a.o. Har vi minst 2 delintervall blir feilen mindre enn 0.08

Oppgave 4

a) *Regn ut integralene*

$$1) \int_0^{\pi/2} (1 + 3\sin\theta)^{3/2} \cos\theta d\theta \qquad 2) \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$$

Svar:
1) Substitusjonen $u = 1+3\sin\theta$ gir $\cos\theta d\theta = du/3$ og $\theta = 0 \Rightarrow u = 1$, $\theta = \pi/2 \Rightarrow u = 4$ som gir:

$$\int_0^{\pi/2} (1 + 3\sin\theta)^{3/2} \cos\theta d\theta = \frac{1}{3}\int_1^4 u^{3/2} du = \frac{2}{3\cdot 5} u^{5/2}\Big|_1^4 = \frac{62}{15}$$

2) Delvis integrasjon

$$\int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = (\ln x - 1)\frac{-1}{x} + \int \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln x}{x} + C$$

b) *Avgjør om det uegentlige integralet*

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$$

konvergerer eller divergerer. Om det konvergerer, finn verdien det konvergerer mot.
Svar: Vi prøver å regne ut integralet. Delvis integrasjon gir:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx$$

Altså er:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{a\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty} \frac{(\ln a)^2}{2} = \infty$$

Dvs. Integralet divergerer.

Oppgave 5

Finn likningen for tangenten til kurven

$$x\sin y + y\sin x = \frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2})$$

gjennom punktet $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.
Svar: Deriverer implisitt:

$$\begin{aligned} \sin y + x\cos y y' + y'\sin x + y\cos x &= 0 \\ y' &= -\frac{\sin y + y\cos x}{x\cos y + \sin x} \\ y'(\frac{\pi}{2}) &= -\frac{\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pi + 4} \end{aligned}$$

og setter inn i etpunktsformelen:

$$\begin{aligned} y - \frac{\pi}{4} &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pi + 4}(x - \frac{\pi}{2}) \\ y &= -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pi + 4}x + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}\pi + 4} \end{aligned}$$

Oppgave 6

Løs initialverdiproblemene

a)

$$xy' = 2y + x^3\cos x; \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

Svar: Enkel omskriving viser at dette er 1.ordens linear likning.

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2\cos x$$

Multipliserer med integrerende faktor: $e^{-\int 2/x dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$. Da har vi:

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} &= \cos x \\
\left(\frac{y}{x^2}\right)' &= \cos x \\
\int \left(\frac{y}{x^2}\right)' dx &= \int \cos x dx \\
\frac{y}{x^2} &= \sin x + C \\
\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} &= 1 + C; \qquad C = 0 \\
y &= x^2 \sin x
\end{aligned}$$

b)

$$y' = \frac{t^2 y - y}{t}; t > 0 \qquad y(1) = 1$$

Svar: Separabel likning:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{t^2 y - y}{t} \\
\frac{y'}{y} &= \frac{t^2 - 1}{t} \\
\int \frac{y' dt}{y} &= \int \frac{t^2 - 1}{t} dt \\
\int \frac{dy}{y} &= \int (t - \frac{1}{t}) dt \\
\ln y &= \frac{t^2}{2} - \ln t + C \\
\ln ty &= \frac{t^2}{2} + C \\
ty &= e^{\frac{t^2}{2} + C} = C_1 e^{\frac{t^2}{2}} \\
y &= e^{\frac{t^2}{2} + C} = C_1 \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{t} \\
y(1) &= 1 \Rightarrow C_1 = e^{-1/2} \\
y(t) &= \frac{e^{\frac{t^2-1}{2}}}{t}
\end{aligned}$$

(Om vi skriver likningen: $y' + (\frac{1}{t} - t)y = 0$, har vi en 1. ordens lin. likning, og kan bruke samme teknikk som i a))

Oppgave 7

Et rykte om Gardia i drikkevannet til Bergen by sprer seg. Etter en uke har 10000 hørt ryktet. Anta at raten ryktet sprer seg med er proporsjonal med antall menneske som ennå ikke har hørt ryktet.

Sett opp en differensiallikning som modellerer problemet. Løs denne og finn hvor mange menneske som kjenner ryktet etter 5 uker, når vi antar at folkemengden i Bergen er 250000.

Svar: La y være antallet som har hørt ryktet og a være spredningsraten. Da har vi:

$$y' = a(250000 - y)$$

I tillegg setter vi $y(0) = 0$ og har oppgitt $y(1) = 10000$.

Likningen er en enkel separabel likning som løses lett

$$y(t) = C_1 e^{-at} + 250000$$

$y(0) = 0$ gir $C_1 = -250000$ og $y(1) = 10000$ gir $a = -\ln(24/25)$ som gir oss:

$$y(t) = 250000(1 - \left(\frac{24}{25}\right)^t)$$

etter 5 uker

$$y(5) = 250000(1 - \left(\frac{24}{25}\right)^5) = 46157$$

Tor Sørevik Helge Dahle