# Løsningsforslag eksamen MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I – høsten 2008

### OPPGAVE 1

(a) $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ og dersom $\theta = \arg z$, da er $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$, slik at vi kan ta $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dermed er

$$w = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)$$

eller

$$w = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dermed er

$$w^4 = \sqrt{2}^4\Big(\cos\Big(4\cdot\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(4\cdot\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = 4\Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big) = -4.$$

(b)

$$\frac{4+2i}{3-i} = \frac{(4+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{12+4i+6i+2i^2}{9-i^2} = \frac{10+10i}{9+1} = 1+i.$$

(c) Har

$$z^3 = -1 = \Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big)$$

Dermed er de tre løsningene

$$\begin{aligned}
z_1 &= \Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.\\
z_2 &= \Big(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\Big) = \Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big) = -1.\\
z_2 &= \Big(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\Big) = \Big(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

### OPPGAVE 2

(a) La

$$g(x) := \ln x - \frac{1}{x}.$$

Da er $g$ kontinuerlig på $[1, e]$ med $g(1) = -1 < 0$ og $g(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Dermed må det ved *Skjæringssetningen* finnes en $c \in [1, e]$ som er slik at $g(c) = 0$, dvs. slik at

$$\ln c = \frac{1}{c}.$$

Derfor er $c \in [1, e]$ en løsning på ligningen $\ln x = \frac{1}{x}$.

(b) Nei, ligningen kan ikke ha mer enn den ene løsningen.

Begrunnelse: Siden
$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$
er $g'(x) > 0$ på $[1, e]$, slik at $g$ er voksende på $[1, e]$. Dermed er $g(x) < g(c) = 0$ for alle $x < c$ og $g(x) > g(c) = 0$ for alle $x > c$, slik at $c$ er eneste nullpunkt til $g$ på $[1, e]$ og følgelig eneste løsning på ligningen $\ln x = \frac{1}{x}$.

## OPPGAVE 3

(a) Vi har at
$$\lim_{x\to 0^+} \sin 2x = \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x \neq 0,$$
og
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\sin 2x}{\frac{d}{dx}(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos 2x}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$
Alle betingelsene for å bruke L'Hôpital er dermed oppfylt og
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\sin 2x}{\frac{d}{dx}(e^x - 1)} = 2.$$

(b) Har at
$$\left|\ln(x+1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \Big|\ln(x+1)\Big|\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \Big|\ln(x+1)\Big|$$
slik at
$$-\Big|\ln(x+1)\Big| \leq \ln(x+1)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \Big|\ln(x+1)\Big|.$$
Siden $\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$, gir *Skviseteoremet* at
$$\lim_{x\to 0} \ln(x+1)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(c) Gitt $\epsilon > 0$. La $\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$.

Dersom $0 < |x-3| < \delta$, vil spesielt $|x-3| < 1$, som medfører at $|x+3| < 7$. Dermed, siden også $|x-3| < \frac{\epsilon}{7}$, får vi:
$$|x^2 - 9| = |x+3||x-3| < 7|x-3| < 7 \cdot \frac{\epsilon}{7} = \epsilon.$$

## OPPGAVE 4

(a) Sett $u := e^x$. Da er $du = e^x dx$, slik at
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1} e^x + C.$$

(b) Faktoriserer nevner og bruker delbrøksoppspalting:
$$\frac{3x+1}{x^2-4x+3} = \frac{3x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}, \text{ for } B, C \in \mathbb{R}.$$
ganger vi med $(x-1)(x-3)$ får vi:
$$3x+1 = A(x-3) + B(x-1)$$
dvs.
$$3x+1 = (A+B)x - (3A+B)$$
som gir ligningene $A+B=3$ og $3A+B=-1$. Herfra får vi $A=-2$ og $B=5$, slik at
$$\frac{3x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-3}.$$
Dermed får vi:
$$\begin{aligned}\int \frac{3x+1}{x^2-4x+3}\,dx &= \int \Big(\frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-3}\Big)\,dx = -2\int \frac{1}{x-1}\,dx + 5\int \frac{1}{x-3}\,dx \\ &= -2\ln|x-1| + 5\ln|x-3| = \ln\frac{|x-3|^5}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$
(Begge de to siste svarene er like gode.)

(c) Snittpunktene mellom sirkelen $x^2+y^2=2$ og linjen $y=x$ får vi der $x^2+x^2=2$, dvs. der $2x^2=2$, dvs. $x^2=1$, dvs. $x=\pm 1$. Snittpunktet i første kvadrant er derfor $(1,1)$. Området som skal roteres ligger over $y=x$ og under $y=\sqrt{2-x^2}$, slik at volumet $V$ er da
$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^1 x\Big(\sqrt{2-x^2}-x\Big)\,dx = 2\pi\Big[-\frac{1}{3}(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 \\ &= 2\pi\Big(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} + 0\Big) = 2\pi\cdot\frac{1}{3}\Big(2^{\frac{3}{2}} - 2\Big) \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-2) = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$
(ved sylinderskallmetoden om $y$-aksen).

## OPPGAVE 5

La $f(x) = \ln x$.

(a) Vil bruke induksjon til å vise at
$$(*) \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \text{ for alle } n \geq 1.$$
Siden $f'(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^0 0!}{x^1}$, stemmer $(*)$ for $n=1$.

Anta nå at $(*)$ stemmer for $n=k$, der $k \geq 1$, dvs. at
$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}.$$

Da er

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \Big[f^{(k)}(x)\Big]' = \Big[(-1)^{k-1}(k-1)!x^{-k}\Big]' = (-1)^{k-1}(k-1)!\Big[x^{-k}\Big]' \\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot\Big(-kx^{-k-1}\Big) = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot(-1)\cdot k\cdot x^{-k-1} \\
&= (-1)^{k-1}\cdot(-1)\cdot(k-1)!\cdot k\cdot x^{-k-1} = (-1)^k\cdot k!\cdot x^{-k-1} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}},
\end{aligned}
$$

som er formel $(*)$ for $n=k+1$. Vi har dermed vist at $(*)$ holder for $n=k+1$ dersom $(*)$ holder for $n=k$.

Derfor holder $(*)$ for alle $n\geq 1$.

(b) Taylorpolynomet $P_n(x)$ av grad (orden) $n$ for $f$ om $x=1$ er gitt ved

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j = f(1)+\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j \\
&= \ln 1+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{j!}(x-1)^j \\
&= 0+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{j!}(x-1)^j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(x-1)^j, \\
&= (x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

(begge de to siste linjene er like gode svar), hvor vi har brukt formelen fra (a) og at $(j-1)!/j! = 1/j$.

(c)

$$
\begin{aligned}
\ln 2 &= f(2)\approx P_3(2) = \sum_{j=1}^{3}\frac{(-1)^{j-1}}{j}(2-1)^j \\
&= \sum_{j=1}^{3}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}
$$

Absoluttverdien til feilen i denne tilnærmingen er gitt ved

$$
|E_3(2)| = \left|\frac{f^{(4)}(s)}{4!}(2-1)^4\right| = \left|\frac{(-1)^3 3! s^{-n}}{4!}\right| = \left|\frac{1}{4s^4}\right| = \frac{1}{4s^4}
$$

for en $s\in(1,2)$ (hvor vi igjen har brukt formelen fra (a)). Siden funksjonen $\frac{1}{4s^4}$ er avtagende for $s\in(1,2)$, får vi at

$$
|E_3(2)| = \frac{1}{4s^4} < \frac{1}{4}.
$$

(d) Vi har at
$$\ln 2 = \ln 2 - \ln 1 = \int_1^2 \frac{1}{x}.$$
La $g(x) = \frac{1}{x}$. Har at $g^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \frac{4!}{x^5} = \frac{24}{x^5}$ ved (a), og siden dette er en avtagende funksjon på $[1,2]$, har vi at $|g^{(4)}(x)| \leq \frac{24}{1^5} = 24$ på $[1,2]$. Feilen ved tilnærmingen $S_n$ av $\int_1^2 \frac{1}{x}$ ved Simpsons metode med $n$ delintervaller er derfor gitt ved
$$\Big| \int_1^2 \frac{1}{x} - S_n \Big| \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4} = \frac{24}{180n^4} = \frac{2}{15n^4}.$$
Siden
$$\frac{2}{15n^4} < 0{,}005 \Leftrightarrow \frac{80}{3} < n^4,$$
holder det å velge $n = 4$ (siden $n$ må være et partall).

Tilnærmingen er da:
$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{1/4}{3}\Big(g(1) + 4g(\frac{5}{4}) + 2g(\frac{6}{4}) + 4g(\frac{7}{4}) + g(2)\Big) \\ &= \frac{1}{12}\Big(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{4}{6} + 4\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1747}{2520} \end{aligned}$$

## OPPGAVE 6

(a) Differensialligningen
$$\frac{dy}{dt} = ky\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$
er separabel og har den konstante løsningen $y(t) = 0$ (som vi egentlig kan se bort fra). Separerer vi og integrerer (og bruker at $y(t) > 0$) får vi
$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int k\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \\ \ln y &= \frac{6k}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + C \\ y &= e^{\frac{6k}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}t)+C} \\ y &= e^C e^{\frac{6k}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}t)} \end{aligned}$$
Setter vi inn initialbetingelsen får vi
$$y_0 = y(0) = e^{0+C} = e^C$$
og dermed har vi
$$y(t) = y_0 e^{\frac{6k}{\pi}\sin(\frac{\pi}{6}t)}$$

(b) Vi har at $y_0 = 10^6$ og
$$2\cdot 10^6 = y(3) = 10^6 \cdot e^{\frac{6k}{\pi}\sin(\frac{3\pi}{6})} = 10^6 \cdot e^{\frac{6k}{\pi}},$$
slik at $e^{\frac{6k}{\pi}} = 2$.

Siden $\sin(\frac{3\pi}{6})$ svinger mellom 1 og $-1$, vil antall edderkopper svinge mellom maksimalverdi $y_0 e^{\frac{6k}{\pi}}$ og minimalverdi

$$y_0 e^{-\frac{6k}{\pi}} = y_0 \cdot \frac{1}{e^{\frac{6k}{\pi}}} = y_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10^6.$$

Det vil derfor alltid være minst en halv million edderkopper på øya.

## OPPGAVE 7

Ved *sekantsetningen* finnes det en $c \in (8, 10)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \frac{4 - 3}{10 - 8} = \frac{1}{2}.$$

Da vil

$$f^{-1\prime}(f(c)) = \frac{1}{f'(c)} = 2,$$

ved egenskapen til den deriverte av en invers funksjon, slik at grafen til $f^{-1}$ har en tangentlinje med stigning lik 2 i punktet $f(c)$.

Andreas Leopold Knutsen