Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.
Løsningsforslag til Eksamen i emnet MAT 111 - Grunnkurs i matematikk I
Torsdag 22. mai 2008, kl. 09-14.

Dette er kun et løsningsFORSLAG.

Oppgave 1

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 e^{-x}$

a) *Finn eventuelle nullpunkt til* f. *Avgjør hvor* f *er voksende og hvor den er avtakende og finn eventuelle ekstremalpunkt.*

Ligningen $f(x) = x^3 e^{-x} = 0$ gir oss et nullpunkt $x = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3(-e^{-x}) = x^2(3-x)e^{-x}$$

$$f' = 0 \quad \text{hvis} \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 3$$

Første deriverte $f' > 0$ for $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3)$ og $f' < 0$ for $x \in (3, \infty)$. Funksjonen f er voksende på $(-\infty, 3)$ og avtakende på $(3, \infty)$. f har absolut (globalt) maksimum i punkt $x = 3$. Punkt $x = 0$ er ikke ekstremalpunkt.

b) *Finn* $f''(x)$, *bestem konkavitet og eventuelle vendepunkt.*

$$f''(x) = (6x - 3x^2)e^{-x} + (3x^2 - x^3)(-e^{-x}) = (x^3 - 6x^2 + 6x)e^{-x}$$

$$f'' = 0 \quad \text{hvis} \quad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 3 - \sqrt{3} \quad \text{eller} \quad x = 3 + \sqrt{3}$$

Annenderiverte $f'' > 0$ og funksjonen f er konveks for $x \in (0, 3-\sqrt{3}) \cup (3+\sqrt{3}, \infty)$. $f'' < 0$ og f er konkav for $x \in (-\infty, 0) \cup (3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$. Det finnes tre punkter $x = 0$, $x = 3 - \sqrt{3}$ og $x = 3 + \sqrt{3}$.

c) *Finn asymptoter til* f. *Skisser grafen til* f.

Funksjon $f(x)$ har en asymptote $y = 0$ for $x \to \infty$.

La oss oppsummere resultater fra punkter a) og b) i tabellen.

x		0		$3-\sqrt{3}$		3		$3+\sqrt{3}$	
f'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$ $\frown$	vend.	$\nearrow$ $\smile$	vend.	$\nearrow$ $\frown$	max	$\searrow$ $\frown$	vend.	$\searrow$ $\smile$

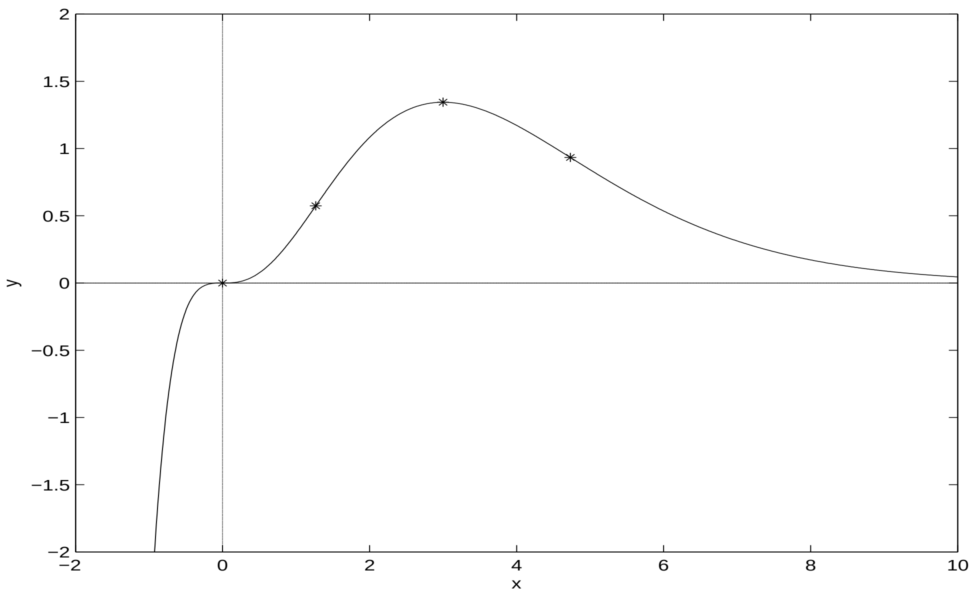

FIGURE 1. Markerte punkter har koordinater $(0,0)$, $(3-\sqrt{3}, f(3-\sqrt{3}))$, $(3, f(3))$ og $(3+\sqrt{3}, f(3+\sqrt{3}))$.

Oppgave 2

Regn ut følgende grenseverdier

$$a) \quad \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^6+3x^3}-x^3), \qquad b) \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sin(x^2)}$$

a)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^6+3x^3}-x^3) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^6+3x^3}-x^3)(\sqrt{x^6+3x^3}+x^3)}{(\sqrt{x^6+3x^3}+x^3)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+3x^3-x^6}{(\sqrt{x^6+3x^3}+x^3)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{(\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}+1)} = \frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\sin(x^2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\cos(x^2)\cdot 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x}{(1+x)}}{\cos(x^2)\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)\cos(x^2)} = -\frac{1}{2},$$

hvor vi har brukt L'Hôpitals regel.

Oppgave 3

La $f(x)=\sqrt{x}$.

a) *Bestem Taylorpolynomet* $P_2(x)$ *av 2. grad (kvadratisk approksimasjon) til* $f(x)$ *i punktet* $x=4$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

I punktet $x=4$ har vi

$$f(4)=2, \qquad f'(4)=\frac{1}{4}, \qquad f''(4) = -\frac{1}{32}.$$

$$P_2(x) = f(4)+\frac{f'(4)}{1!}(x-4)+\frac{f'(4)}{2!}(x-4)^2 = 2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$$

b) *La* $E_2(x)$ *være restleddet til tilnærmelsen* $P_2(x)$ *funnet over. Gi et uttrykk for* $E_2(x)$.

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-4)^3,$$

hvor s er et punkt som ligger mellom 4 og x;

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8}x^{-5/2}$$

c) *Benytt* $P_2(x)$ *til å regne ut en tilnærmet verdi for* $f(5)$. *Benytt uttrykket for* $E_2(x)$ *til å estimere feilen i denne tilnærmelsen.*

$$f(5)\approx P_2(5) = 2+\frac{1}{4}(5-4)-\frac{1}{64}(5-4)^2 = 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64} = 2\frac{15}{64}\approx 2.2344$$

$$E_2 = \frac{1}{3!}f'''(s)(5-4)^3, \quad \text{hvor} \quad 4<s<5.$$

Fordi

$$\frac{3}{8}5^{-5/2}\le f'''(s)\le \frac{3}{8}4^{-5/2}, \quad \text{for} \quad 4<s<5$$

får vi at
$$\frac{1}{6}\frac{3}{8}\frac{1}{5^{5/2}} \leq E_2(5) \leq \frac{1}{6}\frac{3}{8}\frac{1}{4^{5/2}}.$$
Vi regner ut grenser for feilen i $x = 5$ gitt ved
$$0.0011 \approx \frac{1}{400\sqrt{5}} \leq E_2(5) \leq \frac{1}{512} \approx 0.0020$$

Oppgave 4

a) *Regn ut følgende integral*

$$i) \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)\arctan x}, \qquad ii) \quad \int \frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x}dx$$

i) Vi innfører en ny variabel $\theta = \arctan x$, $d\theta = \frac{dx}{1+x^2}$:
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\arctan x} = \int \frac{d\theta}{\theta} = \ln|\theta| + C = \ln|\arctan x| + C$$

ii) Vi vil bruke delbrøksoppspaltning. Nevneren er faktorisert i irredusible polynomer
$$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x+2)(x+3).$$
Vi vil derfor skrive vår rasjonale funksjon på formen
$$\frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$
Vi sammenligner koeffisienter og får
$$A(x^2+5x+6) + Bx(x+3) + Cx(x+2) = x^2+6,$$
$$(A+B+C)x^2 + (5A+3B+2C)x + 6A = x^2+6,$$
$$\begin{cases} A+B+C &= 1, \\ 5A+3B+2C &= 0, \\ 6A &= 6. \end{cases}$$
Løsningen er
$$A = 1, \qquad B = -5, \qquad C = 5.$$
Det betyr at
$$\frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x} = \frac{1}{x} - \frac{5}{x+2} + \frac{5}{x+3}$$
og vi kan finne integralet
$$\int \frac{x^2+6}{x^3+5x^2+6x}dx = \int \frac{dx}{x} - 5\int \frac{dx}{x+2} + 5\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \ln|x| - 5\ln|x+2| + 5\ln|x+3| + C$$

b) *Avgjør om det uegentlige integralet*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

konvergerer eller divergerer.

Vi bruker Sammenlikningskriteriet (Teorem 3, s. 346). Siden

$$0 < \frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{x^4}$$

og

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^4} = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_1^R = \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{1}{3R^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

konkluderer vi at det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ konvergerer.

Oppgave 5

Løs differensialligningen

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$$

med initialkravet $y(1) = 0$.

Førsteordens lineær differensialligning. Vi multipliserer begge sider med $\frac{1}{x^2}$:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = e^x,$$

$$\frac{1}{x^2}y' + \left(\frac{1}{x^2}\right)' y = e^x,$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = e^x,$$

og integrerer

$$\frac{y}{x^2} = e^x + C.$$

Løsningen for differensialligningen blir da

$$y = x^2(e^x + C).$$

Vi setter inn $y(1) = 0$:

$$0 = 1^2(e^1 + C),$$

$$C = -e.$$

Initialverdiproblemet har løsningen

$$y(x) = x^2(e^x - e).$$

Oppgave 6

Beregn volumet som fremkommer ved å rotere området avgrenset av $y = 0$ og $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi$ om x-aksen. Beregn volumet som fremkommer ved å rotere det samme området om y-aksen.

1. Når vi roterer om x-aksen har vi formelen

$$V = \pi \int_0^\pi f^2(x)dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

2. Når vi roterer om y-aksen har vi

$$V = 2\pi \int_0^\pi x f(x)dx = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi \left[-x \cos x + \sin x\right]_0^\pi = 2\pi^2,$$

hvor vi har brukt

$$\int x \sin x dx = \int x(-\cos x)' dx = -x \cos x - \int (-\cos x)x' dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Oppgave 7

I denne oppgaven beregner vi det bestemte integralet

$$\int_2^8 \frac{dx}{x} \tag{1}$$

numerisk.

a) *Finn en tilnærmet verdi for integralet ved hjelp av Simpsons metode med 6 delintervall.*

Vi bruker Simpsons methode med $a = 2$, $b = 8$, 6 delintervaller ($n = 6$) og avstand $h = \frac{b-a}{n} = 1$. Metoden gir da

$$S_6 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 4\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{5} + 2\frac{1}{6} + 4\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = 1\frac{977}{2520} \approx 1.3877$$

b) *Finn feilskranken for den tilnærmede verdien som du fikk i punkt a). Finn det bestemte integralet (1) ved antiderivasjon og vis at den tilnærmede verdien som du fikk i punkt a) oppfyller denne feilskranken.*

Feilen for Simpsons metode er

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \frac{K(b-a)}{180} h^4,$$

hvor

$$K = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

Derfor får vi

$$K = \max_{x\in[2,8]} \left|\frac{24}{x^5}\right| = \frac{24}{2^5} = \frac{3}{4}$$

og

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \frac{\frac{3}{4}(8-2)}{180} 1^4 = \frac{1}{40} = 0.025$$

$$\int_2^8 \frac{dx}{x} = \ln x|_2^8 = \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 \approx 1.3864$$

Den tilnærmede verdien oppfyller den teoretiske feilskranken:

$$|1.3864 - 1.3877| = 0.0014 < 0.025$$

c) *Hvor mange delintervall bør vi bruke for å finne en tilnærmet verdi for integralet (1) ved Simpsons metode med feil mindre enn* 10^{-3}*?*

Vi omskriver feilen for Simpsons metode som

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}.$$

Vi ønsker at feilen skal være mindre enn 10^{-3}:

$$\frac{K(b-a)^5}{180n^4} < 10^{-3}.$$

Det holder når

$$n^4 > \frac{K(b-a)^5}{180 \cdot 10^{-3}},$$

$$n > \left(\frac{K(b-a)^5}{180 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/4} = \left(\frac{\frac{3}{4}(8-2)^5}{180 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/4} = 6\sqrt{5} \approx 13.42$$

Dette betyr at vi får god nok nøyaktighet ved å velge $n = 14$.

Roman Kozlov Per Manne