Løsningsforslag eksamen MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I – høsten 2009

OPPGAVE 1

(a) Vi har $|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. I det komplekse plan ligger w i 4. kvadrant og vinkelen θ mellom tallet og den relle aksen har $\tan\theta = 1$, dvs. at $\theta = \pi/4$. Dermed er $\operatorname{Arg} w = -\frac{\pi}{4}$. Skrevet på polarform er tallet

$$w = \sqrt{2}\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(begge svar erlike gode).

Ved *de Moivres formel* har vi

$$\begin{aligned} w^8 &= (\sqrt{2})^8\Big[\cos\Big(8\cdot(-\frac{\pi}{4})\Big) + i\sin\Big(8\cdot(-\frac{\pi}{4})\Big)\Big] \\ &= 2^4\Big[\cos\Big(-2\pi\Big) + i\sin\Big(-2\pi\Big)\Big] \\ &= 2^4\cdot\Big(1 + i\cdot 0\Big) = 16. \end{aligned}$$

(b)

$$z\cdot\overline{w} = (3+2i)(1+i) = 3 + 3i + 2i + 2i^2 = 1 + 5i.$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}} = \frac{(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+5i}{1-i^2} = \frac{1+5i}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

OPPGAVE 2

(a) Gitt $\epsilon > 0$. Vil finne $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ slik at

$$|x^2 - 4x + 4 - 1| < \epsilon \ \text{ når } \ 0 < |x-3| < \delta.$$

La $\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$.

Dersom $0 < |x-3| < \delta$, vil spesielt $|x-3| < 1$. Dette er ekvivalent med at $-1 < x-3 < 1$, som gir $1 < x-1 < 3$, som spesielt medfører at $|x-1| < 3$. Dermed, siden også $|x-3| < \frac{\epsilon}{3}$, får vi:

$$|x^2 - 4x + 4 - 1| = |x^2 - 4x + 3| = |x-3|\cdot|x-1| < \frac{\epsilon}{3}\cdot 3 = \epsilon.$$

Merknad: Her finnes selvfølgelig flere andre korrekte svar. Noen skrev f.eks. at $|x-3| < 1$ medfører $|x| < 4$, og brukte så *trekantulikheten* for å konkludere at $|x-1| \leq |x| + 1 < 5$. Disse fikk svaret $\delta := \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$, som er like riktig (men litt mer tungvint å komme frem til).

(b) Vi har at

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos x) = \ln(\lim_{x\to 0}\cos x) = \ln 1 = 0$$

(siden $\ln x$ er kontinuerlig),

$$\lim_{x\to 0} \tan x = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0,$$

og

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\ln(\cos x)}{\frac{d}{dx}\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{1}\cdot(-0)}{\frac{1}{1^2}} = 0.$$

Alle betingelsene for å bruke L'Hôpital er dermed oppfylt og

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x}\cdot\ln(\cos x)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(\cos x)}{\frac{d}{dx}\tan x} = 0.$$

(c) Vi har:

$$f \text{ kontinuerlig i } 0 \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \iff \lim_{x\to 0^+} x\cos(\ln x) = k$$

Siden

$$-1 \leq \cos(\ln x) \leq -1 \text{ for alle } x > 0,$$

er

$$-x \leq x\cos(\ln x) \leq -x \text{ for alle } x > 0,$$

og siden $\lim_{x\to 0^+} x = 0$, gir *skviseteoremet* at $\lim_{x\to 0^+}\cos(\ln x) = 0$, slik at vi må ha

$$k = 0$$

for at f skal være kontinuerlig i 0.

OPPGAVE 3

Vi definerer funksjonen

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x} + 2x - 2.$$

Da har vi at

$$r \text{ er løsning på ligningen } e^{\frac{1}{2}x} = 2 - 2x \iff f(r) = 0.$$

(a) Vi har at $f(0) = 1 - 2 = -1$, $f(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} > 0$ og f er kontinuerlig overalt. Ved *skjæringssetningen* finnes det derfor et tall $r \in [0,1]$ slik at $f(r) = 0$. Dermed er denne $r \in [0,1]$ en løsning på ligningen $e^{\frac{1}{2}x} = 2 - 2x$.

(b) f er derivérbar overalt med

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2 > 0 \text{ for alle } x.$$

Alternativ 1: Om f har to nullpunkter, si a og b med $a < b$, vil f være derivérbar på hele $[a,b]$. Da vil det ved *Rolles teorem* eller *sekantsetningen* finnes en $c \in (a,b)$ slik at $f'(c) = 0$, en motsigelse. Derfor har f maksimalt ett nullpunkt og følgelig har ligningen $e^{\frac{1}{2}x} = 2 - 2x$ kun den éne løsningen.

Alternativ 2: Siden $f'(x) > 0$ for alle x i intervallet $(-\infty, \infty)$ vil f være voksende på hele $(-\infty, \infty)$. Dette vil si at $f(b) > f(a)$ når $b > a$, slik at f høyst kan ha ett nullpunkt. Følgelig har ligningen $e^{\frac{1}{2}x} = 2 - 2x$ kun den éne løsningen.

(c) Bruker Newtons metode én gang med $x_0 = 0$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{-1}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Dette er en tilnærmet verdi for løsningen r på ligningen $e^{\frac{1}{2}x} = 2 - 2x$:

$$r \approx x_1 = \frac{2}{5}.$$

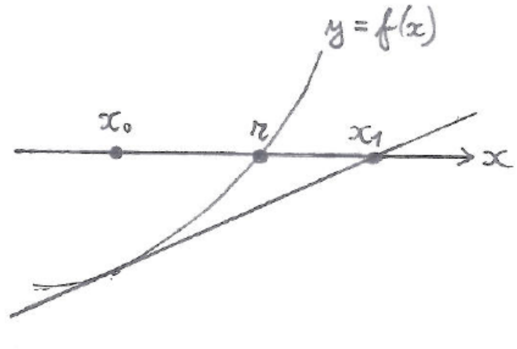
Vi har at

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}x} > 0 \text{ for alle } x.$$

Dermed er grafen til f oppoverkrummet overalt, slik at alle tangentene til grafen vil ligge under grafen. Siden grafen til f også er voksende overalt (siden $f'(x) > 0$, som vist i (b)), betyr dette at alle tangenter vil snitte x-aksen til høyre for punktet der grafen til f snitter x-aksen, som er nullpunktet r.

Spesielt vil tangenten i punktet $x_0 = 0$ snitte x-aksen til høyre for punktet der grafen snitter x-aksen. Siden tangenten snitter i x_1 (det er slik Newtons metode virker), vil $x_1 > r$, altså er verdien vi finner (litt) for stor.

Her er en tegning som illustrerer situasjonen:



Merknad: Dersom man definerer funksjonen

$$f(x) = 2 - 2x - e^{\frac{1}{2}x}$$

for å angripe oppgaven, argumenterer man på tilsvarende måte, men bruker at funksjonen er avtagende og nedoverkrummet. Svarene blir selvfølgelig de samme.

OPPGAVE 4

Siden g' er kontinuerlig på I og I er lukket og begrenset, har g' maksimal- og minimalverdi på I, ved *ekstremalverdisetningen* ("*Max-Min-teoremet*"). Dette gir at det finnes en konstant $M > 0$ slik at

$$|g'(x)| \leq M \text{ for alle } x \in I.$$

(Hvis maksimum og minimum til g' på I er g_{min} og g_{max} henholdsvis, kan vi la $M = \max\{|g_{min}|, |g_{max}|\}$.)

La nå $x_1, x_2 \in I$ og anta at $x_1 \neq x_2$. Siden g er derivérbar på I, er den også derivérbar (og dermed også kontinuerlig) på $[x_1, x_2]$ om $x_1 < x_2$ og $[x_2, x_1]$ om $x_1 > x_2$. Ved *sekantsetningen* på $[x_1, x_2]$ eller $[x_2, x_1]$, vil det finnes en c mellom x_1 og x_2, slik at

$$g'(c) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Siden $c \in I$, må $|g'(c)| \leq M$, slik at

$$\left|\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leq M,$$

som gir

$$\Big|g(x_1) - g(x_2)\Big| \leq M\Big|x_1 - x_2\Big|.$$

Denne ulikheten gjelder også (trivielt) om $x_1 = x_2$, slik at vi har vist at g en Lipschitz-funksjon på I.

OPPGAVE 5

Siden $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ er Taylorpolynomet av orden 1 til $f(x) = \sqrt{x}$ om 9 lik

$$P_1(x) = f(9) + f'(9)(x - 9) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(x - 9) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9).$$

Dermed har vi

$$\sqrt{10} = f(10) \approx P_1(10) = 3 + \frac{1}{6}(10 - 9) = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}.$$

Siden $f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$ gir Taylors formel med restledd (Taylors teorem) at

$$\sqrt{10} = f(10) = P_1(10) + E_1(10),$$

der

$$E_1(10) = \frac{f''(s)}{2!}(10 - 9)^2 = \frac{f''(s)}{2} = -\frac{1}{8s^{\frac{3}{2}}}, \text{ for en } s \in (9, 10).$$

Dermed er $E_1(10) < 0$, slik at

$$\sqrt{10} = f(10) = P_1(10) + E_1(10) < P_1(10) = \frac{19}{6}.$$

Tilnærmingsverdien vi fant er altså (litt) for stor.

OPPGAVE 6

(a) **Alternativ 1:** Bruker delvis integrasjon med

$$U = \ln x \text{ og } dV = x^{-\frac{1}{2}}\, dx,$$

slik at

$$dU = \frac{1}{x}\, dx \text{ og } V = 2x^{\frac{1}{2}}.$$

Får da:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= UV - \int V\,dU = \ln x \cdot 2x^{\frac{1}{2}} - \int 2x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} \ln x - 2 \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}\Big(\ln x - 2\Big) + C.\end{aligned}$$

Alternativ 2: Bruker substitusjonen $u = \sqrt{x}$, slik at $u^2 = x$ og $2u\,du = dx$:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\ln u^2}{u} \cdot 2u\,du = \int 2\ln u^2\,du = \int 2 \cdot 2\ln u\,du = 4\int \ln u\,du,$$

der vi har brukt en av logaritmereglene. Integralet $\int \ln u\,du$ løses ved delvis integrasjon ved å sette

$$U = \ln u \;\text{ og }\; dV = du,$$

slik at

$$dU = \frac{1}{u}\,du \;\text{ og }\; V = u.$$

Da får vi:

$$\int \ln u\,du = UV - \int V\,dU = \ln u \cdot u - \int u \cdot \frac{1}{u}\,du = u\ln u - \int du = u\ln u - u + C_1$$

slik at

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx &= 4\int \ln u\,du = 4(u\ln u - u + C_1) = 4\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C \\ &= \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}\ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}\Big(\ln x - 2\Big) + C.\end{aligned}$$

(Merk at funksjonen $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ kun er definert for $x > 0$, slik at det ikke er nødvendig med absoluttverditegn rundt x i $\ln x$. i svaret.)

(b) Bruker først delbrøksoppspalting:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^3 + 2x} &= \frac{2}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \\ &= \frac{A(x^2+2) + x(Bx + C)}{x(x^2+2)} = \frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx}{x^3 + 2x} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + 2A}{x^3 + 2x},\end{aligned}$$

som gir oss (ved å gange med $x^3 + 2x$):

$$(A+B)x^2 + Cx + 2A = 2.$$

Siden dette skal holde for alle x må vi ha:

$$A + B = 0, \;\; C = 0 \;\text{ og }\; 2A = 2,$$

som lett gir oss

$$A = 1, \;\; B = -1 \;\text{ og }\; C = 0.$$

Dermed har vi

$$\int \frac{2}{x^3+2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C.$$

Dette kan også omskrives som

$$\ln \frac{|x|}{\sqrt{2+x^2}}.$$

(Om man ikke ser integralet $\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$ med en gang, løser man det med substitusjonen $u = x^2+2$.)

(c) Løser først det ubestemte integralet med subsitusjonen $u = \tan^{-1} x$, slik at $du = \frac{dx}{x^2+1}$:

$$\int \frac{e^{\tan^{-1}(x)}}{x^2+1}\,dx = \int e^u\,du = e^u + C = e^{\tan^{-1}(x)} + C.$$

Da er

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{e^{\tan^{-1}(x)}}{x^2+1}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{e^{\tan^{-1}(x)}}{x^2+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[e^{\tan^{-1}(x)}\right]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(e^{\tan^{-1}(R)} - e^{\tan^{-1}(0)}\right) = e^{\lim_{R\to\infty}\tan^{-1}(R)} - e^0 \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - 1.\end{aligned}$$

(Her har vi brukt at brukt at e^x er kontinuerlig.)

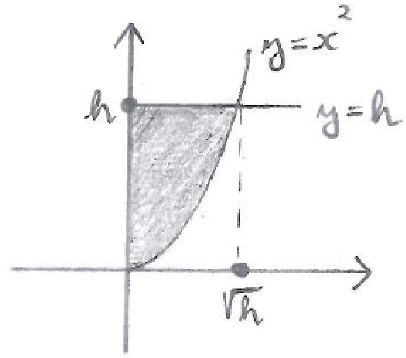
(d) Vi bruker kjerneregelen med $u = \sqrt{x}$ og *Fundamentalteoremet:*

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \left(\frac{d}{du}\int_1^u e^{t^2}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx} = e^{u^2}\cdot\frac{du}{dx} = e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x}{2\sqrt{x}}.$$

Vi kan bruke *Fundamentalteoremet* siden funksjonen e^{t^2} er kontinuerlig.

OPPGAVE 7

(a) Volumet V av vin i glasset når høyden av vinen over bunnen av glasset er h er lik volumet av omdreiningslegemet vi får når vi roterer området i 1. kvadrant avgrenset av y-aksen, linjen $y = h$ og parabelen $y = x^2$ om y-aksen. Området er skravert i tegningen under:



Alternativ 1: Bruker skivemetoden og integrerer med hensyn på y. Området er området mellom grafen til funksjonen $x = \sqrt{y}$ og y-aksen, når y varierer fra 0 til h, slik at

$$V = \pi \int_0^h (\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^h y \, dy = \pi \Big[\frac{1}{2}y^2\Big]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}.$$

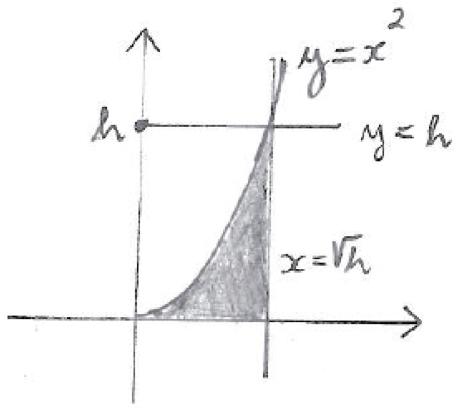
Alternativ 2: Bruker sylinderskallmetoden og integrerer med hensyn på x. Området er området under grafen til funksjonen $y = h$ og over grafen til funksjonen $y = x^2$, når x varierer fra 0 til $\sqrt{h}$ (siden snittpunktet mellom $y = x^2$ og $y = h$ er $(\sqrt{h}, h)$), slik at

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} x(h - x^2) \, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} xh - x^3 \, dx = 2\pi \Big[\frac{h}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{\sqrt{h}} \\ &= 2\pi\Big(\frac{h}{2} \cdot \sqrt{h}^2 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{h})^4\Big) = 2\pi\Big(\frac{h^2}{2} - \frac{1}{4}h^2\Big) = 2\pi \cdot \frac{h^2}{4} \\ &= \frac{\pi h^2}{2}. \end{aligned}$$

Merknad: Det var en del som regnet ut volumet

$$2\pi \int_0^{\sqrt{h}} x \cdot x^2 \, dx$$

og begrunnet dette med sylinderskallmetoden. Svaret blir det samme, men volumet er volumet til legemet vi får når vi dreier området *under* grafen til $y = x^2$ og mellom x-aksen og linjen $x = \sqrt{h}$ (området er skravert i figuren under). Det er altså feil omdreiningslegeme og rent tilfeldig at man får samme svar.



(b) Deriverer vi uttrykket fra (a) implisitt med hensyn på t og bruker kjerneregelen, får vi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{dt}h^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \Big(\frac{d}{dh}h^2\Big) \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{2} \cdot 2h\frac{dh}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt}.$$

Torricellis lov sier at

$$\frac{dV}{dt} = c\sqrt{h} \quad \text{for en} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Setter vi sammen de to siste uttrykkene får vi:

$$\pi h \frac{dh}{dt} = c\sqrt{h},$$

som gir

$$\frac{dh}{dt} = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{-k}{\sqrt{h}},$$

ved å sette $k = -\frac{c}{\pi}$. (Konstanten $k > 0$ siden vinhøyden h avtar.)

(c) Differensialligningen

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{h}}$$

er separabel og løses ved:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{h}\, dh &= -k \int dt \\ \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} &= -kt + C, \quad \text{for en } C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Setter vi inn $t = 0$ får vi

$$\frac{2}{3} h_0^{\frac{3}{2}} = 0 + C = C,$$

og insatt i ligningen over gir dette oss:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} &= -kt + \frac{2}{3} h_0^{\frac{3}{2}} \\ h^{\frac{3}{2}} &= -\frac{3}{2} kt + h_0^{\frac{3}{2}} \\ h(t) &= \left(h_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} kt \right)^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

(d) Vil finne tidspunktet t der $h(t) = 0$, dvs. der

$$h_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} kt = 0,$$

dvs.

$$(*) \;\; t = \frac{h_0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} k}.$$

Vet at $h(7) = \frac{1}{4} h_0$ og bruker dette til å finne $\frac{3}{2} k$:

$$\begin{aligned} h(7) = \left(h_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} k \cdot 7 \right)^{\frac{2}{3}} &= \frac{1}{4} h_0 \\ h_0^{\frac{3}{2}} - 7 \cdot \frac{3}{2} k &= \left(\frac{1}{4} h_0 \right)^{\frac{3}{2}} \\ h_0^{\frac{3}{2}} - 7 \cdot \frac{3}{2} k &= \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} \cdot h_0^{\frac{3}{2}} \\ h_0^{\frac{3}{2}} - 7 \cdot \frac{3}{2} k &= \frac{1}{8} h_0^{\frac{3}{2}} \\ \frac{7}{8} h_0^{\frac{3}{2}} &= 7 \cdot \frac{3}{2} k \\ \frac{1}{8} h_0^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} k. \end{aligned}$$

Innsatt i (*) gir dette oss

$$t = \frac{h_0^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}k} = \frac{h_0^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{8}h_0^{\frac{3}{2}}} = 8.$$

Altså er glasset tomt etter nøyaktig 8 minutter.

Og premien til beste tegning på eksamen går til:

Andreas Leopold Knutsen