UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT111 – Grunnkurs i matematikk I

Onsdag 20. mai 2009, kl. 9.00–14.00

Bokmål

Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten tydelig fremgår av besvarelsen.
Merk: Oppgavesettet har 3 sider (8 oppgaver).

Hjelpemidler: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Oppgave 1

La $z = 2 + 2i$ og $w = -1 + 3i$.

(a) Regn ut (dvs. skriv på formen $a + bi$):

$$\overline{z} + w, \quad zw \quad \text{og} \quad z/\overline{w}.$$

(b) Finn alle tredjerøttene til z.

Oppgave 2

(a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{\sqrt{4x^2 - x + 7}}.$$

(b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x)\ln(x+1).$$

Oppgave 3

Regn ut integralene

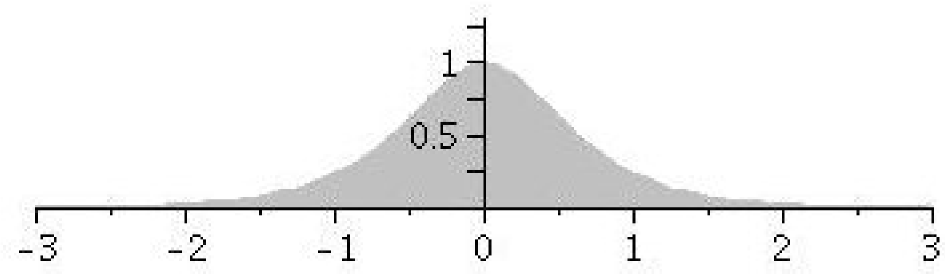
(a)

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x - 2} dx$$

(b)

$$\int \sin(x)\sinh(x) dx$$

(c) Finn volumet av området begrenset av $y = 0$ og $y = \frac{1}{(1+x^2)^2}$, rotert om y-aksen.



Oppgave 4

(a) Finn det 2. ordens Taylorpolynomet til $f(x) = \sqrt{x}$ rundt $x = 9$. Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi for $\sqrt{10}$.

(b) Fra oppgaven i (a), bestem feilleddet $E_2(x)$ og bruk denne til å angi et intervall hvor den sanne verdien til $\sqrt{10}$ ligger.

(c) Bruk Newtons metode på $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10}$, ved å gjennomføre to iterasjoner, med $x_0 = 3$. Forklar hvorfor dette gir en tilnærmet verdi for $\sqrt{10}$.

(d) Igjen, ta for deg funksjonen $g(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10}$. La x_2 være svaret du fikk etter to iterasjoner i (c).
Finn minimumsverdien til $|g'(x)|$ på $[3, 4]$, og tilsvarende maksimumsverdien til $|g''(x)|$ på $[3, 4]$. Bruk dette til å vise at $|x_2 - \sqrt{10}| < 10^{-3}$.

Oppgave 5

(a) Finn den generelle løsningen på

$$y'x - \sqrt{x}y = x.$$

(b) Finn løsningen på

$$\frac{y(x)}{x} = x^3 - \int_1^x \frac{y(t)}{t^2}dt.$$

Oppgave 6

Ta for deg funksjonen

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 5x + 1).$$

(a) Finn toppunkt og bunnpunkt til funksjonen. Finn eventuelle asymptoter.

(b) Bestem når funksjonen er konveks, og når den er konkav. Finn eventuelle vendepunkt.

Oppgave 7

(a) Kompani l'Hôpital har fått i oppdrag om å lage en varmtvannstank. På grunn av lovmessige og praktiske grunner må denne tanken oppfylle følgende:
  - Tanken skal ha en sylinderform, og grunnflaten er derfor en disk. Radien på denne disken kan maksimalt være 5 dm.
  - Summen av høyden og radien til tanken er 10 dm.

  La radien til den sylinderformede varmtvannstanken være gitt ved r dm, og la volumet være gitt med V liter ($= \text{dm}^3$). Finn V som funksjon av r. Altså, finn f slik at $V = f(r)$. Finn også radien som gir en varmtvannstank med størst mulig volum.

(b) Grunngi at funksjonen i (a) har en inversfunksjon, det vil si at vi kan skrive $r = f^{-1}(V)$. Merk at $f(1) = 9\pi$. Finn $(f^{-1})'(9\pi)$.

Oppgave 8

Definer

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Bruk induksjon til å vise at

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

LYKKE TIL!

Erlend Grong Henning Lohne