

UNIVERSITETET I BERGEN
 Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
 Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
 mandag 20. desember 2010 kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemidler: "R. A. Adams, Calculus - A complete course" og kalkulator uten grafisk display, som ikke kan programmeres.

Antall deloppgaver: 14.

OPPGAVE 1

a) Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}.$$

b) Avgjør om følgende funksjon har en kontinuerlig utvidelse i punktet $x = -2$:

$$f(x) = (x + 4) \frac{|x + 2|}{x + 2}.$$

c) For hvilke verdier av a og b vil funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx - 2 & \text{if } x < 1 \\ ax & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

være deriverbar for alle x ? (Hint: Her må man også bruke at funksjonen må være kontinuerlig for å være deriverbar.)

OPPGAVE 2

a) Benytt mellomverditheoremet ("Intermediate -Value Theorem") til å vise at ligningen

$$2x^2 - 2 = \sin(x)$$

har en løsning på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Finn en approksimert løsning av ligningen i 2 a) ved å benytte tre iterasjoner med Newtons metode med startpunkt $x_0 = 1$ på en passende funksjon.

OPPGAVE 3

a) Gitt funksjonen

$$h(s) = \frac{(3s^2 - 1)}{3(1 + s^2)^3},$$

der $\mathcal{D}(h) = [0, \frac{1}{2}]$. Vis at absolutt minimumsverdi for denne funksjonen er $-\frac{1}{3}$ for $s = 0$, og at absolutt maksimumsverdi er $-\frac{16}{375}$ for $s = \frac{1}{2}$.

b) En funksjon $g(x)$ har Maclaurinpolynom av orden 2 gitt ved

$$P_2(x) = x.$$

Det tilhørende restleddet i Taylors formel er gitt ved

$$E_2(x) = h(s)x^3,$$

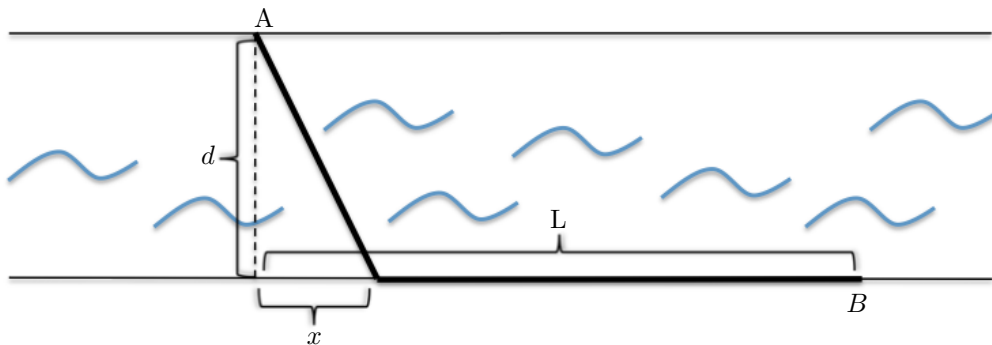
der s er mellom 0 og x og funksjonen h er gitt i 3 a).

Finn $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ og $g'''(x)$.

c) Bruk informasjonen gitt i 3 a) og 3 b), og finn et minst mulig intervall som inneholder $g(\frac{1}{2})$.

OPPGAVE 4

I et område skal det bygges nye kraftlinjer i luftspenn. En del av traseen skal gå over en fjord fra punkt A til punkt B . Valget av trase mellom A og B varierer med valget av avstanden x som illustrert på figuren.



I dette området er det slik at kostnaden per lengdemeter i luftlinje over sjø er $2K$ mens kostnaden per lengdemeter i luftlinje over land er K . Finn et uttrykk for totalkostnaden p for kraftlinjen fra A til B som funksjon av avstanden x , og bestem avstanden x som gir minst totalkostnad for kraftlinjen.

OPPGAVE 5

Borekostnaden p for en oljebrønn øker med brønnens dybde x . En standard modell for dette sier at raten borekostnaden øker med er proporsjonal med borekostnaden, for dybder mellom 400 og 6000 m. Dette modelleres med differensialligningen

$$\frac{dp}{dx} = ap,$$

der a er proporsjonalitetskonstanten.

Gitt at gjennomsnittlig borekostnad for en brønn på 500 m er 0,3 mill dollar, og at gjennomsnittlig kostnad for en brønn på 4000 m er 4,1 mill dollar, gi et estimat for hva de totale borekostnadene for en brønn på 6000 m vil være.

OPPGAVE 6

a) Beregn integralet

$$\int \frac{2x^3 + 2x + 4}{x^2 + 2x} dx.$$

b) Beregn det uekte integralet

$$\int_2^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$$

c) Beregn integralet

$$\int x 2^x dx.$$

OPPGAVE 7

På Danmarks plass i Bergen er det en målestasjon som overvåker luftkvaliteten. Klima og forurensningsdirektoratet karakteriserer luften utifra NO_2 -konsentrasjoner etter følgende tabell:

Luftkvalitet	NO_2 -konsentrasjon
Bra	0-100 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Nokså bra	100-150 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Dårlig	150-200 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
Svært dårlig	Over 200 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Tabellen under viser NO_2 -konsentrasjonen ved gitte tidpunkt 9. desember 2010 (kilde: www.luftkvalitet.info).

Tidspunkt	NO_2 -konsentrasjon
07:00	134,0 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
09:00	157,1 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
11:00	133,9 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
13:00	160,8 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
15:00	191,1 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
17:00	164,7 $\mu\text{g}/\text{m}^3$
19:00	146,4 $\mu\text{g}/\text{m}^3$

Finn en approksimasjon til middelveien for NO_2 -konsentrasjonen mellom kl. 7:00 og kl. 19:00 ved å bruke formelen for middelvei av en funksjon. I approksimasjonen av integralet som inngår skal Simpsons regel benyttes. Hvordan vil du karakterisere luftkvaliteten i denne perioden?

Inga Berre

Hilde Kristine Hvidevold

Trine Mykkeltvedt