BOKMÅL

LØSNINGSFORSLAG
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
mandag 20.desember 2010 kl. 09:00-14:00

OPPGAVE 1

a) Uttrykket vi skal finne grenseverdi for er kontinuerlig for $x = -1$, innsetting gir

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}[\frac{0}{0}] = \lim_{x\to -1} \frac{2x+3}{2x-1} = -\frac{1}{3},$$

der l'Hôpitals regel er benyttet i det første steget siden utrykket hadde ubestemt form [0/0].

b) Funksjonen har en kontinuerlig utvidelse dersom høyresidig og venstresidig grense når x går mot -2 er de samme. Grensene er

$$\lim_{x\to -2^+}(x+4)\frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^+}(x+4)\frac{(x+2)}{(x+2)} = -2+4 = 2,$$
$$\lim_{x\to -2^-}(x+4)\frac{|x+2|}{x+2} = -\lim_{x\to -2^+}(x+4)\frac{(x+2)}{(x+2)} = -(-2+4) = -2.$$

Siden venstresidig og høyresidig grense ikke er like, kan funksjonen ikke ha en kontinuerlig utvidelse.

c) Funksjonen er et polynom for $x \neq 1$, og er derfor deriverbar for $x \neq 1$. Dersom funksjonen skal være deriverbar for $x = 1$, må den være kontinuerlig. Det betyr at følgende må gjelde:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1). \tag{1}$$

Siden funksjonen er lineær (et førstegradspolynom) for $x >= 1$, har vi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = a.$$

I tillegg ser vi at

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(ax^2 - bx - 2) = a - b - 2.$$

For at identiteten (1) skal gjelde må vi ha

$$a = a - b - 2,$$

som betyr at $b = -2$. Dermed må funksjonen være på formen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x - 2 & \text{if } x < 1, \\ ax & \text{if } x >= 1. \end{cases}$$

Siden funksjonen er et polynomet $ax^2 - 2$ for $x < 1$ og polynomet ax for $x > 1$, betyr det at de høyre og venstresidige deriverte eksisterer. For $x \geq 1$ er funksjonen et polynom, og vi kan benytte derivasjonsregler direkte for å finne høyresidig derivert.

$$f'_+(1) = \frac{d}{dx}ax_{x=1} = a.$$

For $x < 1$ benytter vi definisjonen:

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 1^-} \frac{a(1+h)^2 + 2(1+h) - 2 - a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^-} \frac{ah^2 + 2ah + a + 2 + 2h - 2 - a}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^-} ah + 2a + 2 = 2a + 2.
\end{aligned}$$

Dersom $f'(1)$ skal eksistere, må vi ha $f'_-(1) = f'_+(1)$, dvs $a = 2a + 2$, som gir $a = -2$.

Valget av konstanter som gir at funksjonen er deriverbar er derfor $a = -2$ og $b = -2$.

OPPGAVE 2

a) Oppgaven er ekvivalent med å vise at funksjonen

$$f(x) = 2x^2 - 2 - \sin(x)$$

har et nullpunkt på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Siden denne funksjonen er differansen av et polynom og en sinusfunksjon som begge er kontinuerlige, er funksjonen kontinuerlig. Siden f er kontinuerlig på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$, og $f(0) = -2 < 0$ og $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{2} - 3 > 0$ har vi fra mellomverditeoremet at f må ha et nullpunkt på $[0, \frac{\pi}{2}]$. Det betyr igjen at ligningen gitt i oppgaven har en løsning på intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Oppgaven er ekvivalent med å finne nullpunkt for funksjonen $f(x)$ definert over. Newtons metode er basert på følgende iterative algoritme:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

I vårt tilfelle er

$$f'(x) = 4x - \cos(x),$$

slik at vi får formelen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^2 - 2 - \sin(x_n)}{4x_n - \cos(x_n)}.$$

Anvendelse av algoritemen gir:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1,24322 \\
x_2 &= 1,21218 \\
x_3 &= 1,21165
\end{aligned}$$

Dermed har vi at en approksimasjon til løsningen av ligningen er $x = 1,212$.

OBS: I denne oppgaven kunne vi f.eks også ha valgt

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{\sin(x)} - 1$$

for funksjonen vi skulle finne nullpunkt av. I dette tilfellet ville det gitt raskere konvergens av Newtons metode.

OPPGAVE 3

a) Finner $h'(s)$ for å undersøke om funksjonen har kritiske punkt

$$\begin{aligned}
h'(s) &= \frac{6s \cdot 3(1+s^2)^3 - (3s^2-1)9(1+s^2)^2 2s}{9(1+s^2)^6} \\
&= \frac{2s(1+s^2) - 2(3s^2-1)s}{(1+s^2)^4} \\
&= \frac{4s(1-s^2)}{(1+s^2)^4} \\
&= \frac{4s(1-s)(1+s)}{(1+s^2)^4}.
\end{aligned}$$

De kritiske punktene for funksjonen har vi for $x = 0, x = 1$ og $x = -1$, der bare $x = 0$ er innenfor $\mathcal{D}(f)$. Funksjonen har ingen singulære punkt. Sjekker funksjonsverdier i endepunkt og kritiske punkt:

$$\begin{aligned}
h(0) &= \frac{3 \cdot 0^2 - 1}{3(1+0^2)^3} = -\frac{1}{3} \\
h(\frac{1}{2}) &= \frac{3(\frac{1}{2})^2 - 1}{3(1+(\frac{1}{2})^2)^3} = -\frac{16}{375}
\end{aligned}$$

Dette betyr at funksjonen har absolutt maksimum lik $-\frac{16}{375}$ og absolutt minimum lik $-\frac{1}{3}$.

b) Fra informasjonen i oppgaven har vi at Taylors formel for funksjonen er

$$g(x) = x + \frac{(3s^2-1)}{3(1+s^2)^3}x^3.$$

Siden Taylors formel av orden to er for en funksjon $g(x)$ om punktet $x = 0$ er gitt ved

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(s)}{3!}x^3,$$

kan vi sammenligne konstanten og koeffisientene foran x, x^2, og x^3 i de to utrykkene. Dette gir: $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 0$ (Alternativ: Bruk at vi må ha $g(0) = P_2(0), g'(0) = P_2'(0), g''(0) = P_2''(0)$), og

$$\begin{aligned}
\frac{g'''(s)}{3!} &= \frac{(3s^2-1)}{3(1+s^2)^3}, \\
g'''(s) &= 3!\frac{(3s^2-1)}{3(1+s^2)^3} = \frac{2(3s^2-1)}{(1+s^2)^3}, \\
g'''(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.
\end{aligned}$$

c) En approksimasjon er gitt ved

$$g(\frac{1}{2}) \approx P_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

Der feilen er gitt ved

$$E_2(x) = h(s)(\frac{1}{2})^3, \quad \text{for } s \in (0, \frac{1}{2}).$$

Siden absolutt maksimumsverdi for $h(s)$ på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$ er $h_{\text{maks}} = -\frac{16}{375}$ for $x = \frac{1}{2}$ og absoultt minimumsverdi er $h_{\min} = -\frac{1}{3}$ for $x = 0$, har vi

$$g(\frac{1}{2}) > P_2(\frac{1}{2}) + h_{\min} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{11}{24},$$
$$g(\frac{1}{2}) < P_2(\frac{1}{2}) + h_{\text{maks}} \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} - \frac{16}{375}(\frac{1}{2})^3 = \frac{371}{750}.$$

Dette gir at $g(\frac{1}{2})$ må være inneholdt i intervallet $(\frac{11}{24}, \frac{371}{750}) \approx (0.4583, 0.4947)$.

OPPGAVE 4

Dersom vi velger et koordinatsystem slik at punktet A har koordinater $(0, d)$, punktet B har koordinater $(L, 0)$, og knekkpunktet på traseen, som vi kan kalle C, har koordinater $(x, 0)$, har vi at avstanden mellom A$(0, d)$ og C$(x, 0)$ er

$$d_{\text{AC}} = \sqrt{d^2 + x^2}.$$

Avstanden mellom C og B er

$$d_{\text{CB}} = L - x.$$

Dersom kostnaden per meter for kraftlinjen over land er K, så vil kostnaden per meter over sjø være $2K$, og vi får følgende uttrykk for totalprisen $p(x)$som funksjon av x:

$$p(x) = 2Kd_{\text{AC}} + Kd_{\text{CB}} = 2K\sqrt{d^2 + x^2} + K(L - x),$$

der det er naturlig å velge $\mathcal{D}(p) = [0, L]$. For å finne minste kostnad, må vi finne absolutt minimumsverdi for p. Finner først kritiske punkt. Den deriverte av $p(x)$ er

$$p'(x) = \frac{2Kx}{\sqrt{x^2 + d^2}} - K$$

For å finne kritiske punkt, må vi løse ligningen $p'(x) = 0$, dvs

$$\begin{array}{rcll} \frac{2Kx}{\sqrt{x^2+d^2}} - K &=& 0 & \text{(legger til } K \text{ på begge sider)} \\ \frac{2Kx}{\sqrt{x^2+d^2}} &=& K & \text{(ganger med } \sqrt{x^2 + d^2}/K) \\ 2x &=& \sqrt{x^2 + d^2} & \text{(kvadrerer)} \\ 4x^2 &=& x^2 + d^2 & \\ 3x^2 &=& d^2 & \\ x &=& \pm\frac{d}{\sqrt{3}} & \end{array}$$

Den negative løsningen kan vi se bort i fra siden den ikke er med i definisjonsområdet. Viser at det kritiske punktet er et minimum ved å benytte andrederiverttesten. Den andrederiverte er

$$p''(x) = \frac{2K\sqrt{x^2 + d^2} - 2Kx\frac{2x}{2\sqrt{x^2+d^2}}}{x^2 + d^2} = \frac{2K(x^2 + d^2) - 4Kx^2}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2K(d^2 - x^2)}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Innsatt for det kritiske punktet får vi

$$p''(\frac{d}{\sqrt{3}}) = \frac{4\sqrt{3}K}{d} > 0.$$

Siden funksjonen er konkav opp i punktet $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$, dette er det eneste kritiske punktet, og funksjonen er kontinuerlig deriverbar, er dette punktet et absolutt minimumspunkt for $g(x)$ på $\mathcal{D}(g)$.

OPPGAVE 5

Differensialligningen

$$\frac{dp}{dx} = ap$$

er en separabel differensialligning og vi har

$$\begin{aligned}\int \frac{dp}{p} &= \int a dx \\ \ln p &= ax + C' \\ p &= e^{C'} e^{ax} = Ce^{ax}.\end{aligned}$$

For å bestemme de ukjente konstantene a og C benytter vi informasjonen om borekostnader til 500 og 4000 m, dvs $p(500) = 0,3$ og $p(4000) = 4,1$. Dette gir

$$\begin{aligned}0,3 = Ce^{500a} \quad &\Rightarrow \quad \ln 0,3 = \ln C + 500a \\ 4,1 = Ce^{4000a} \quad &\Rightarrow \quad \ln 4,1 = \ln C + 4000a\end{aligned}$$

Trekker vi den første ligningen fra den andre, får vi

$$\ln \frac{4,1}{0,3} = 3500a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3500} \ln \frac{4,1}{0,3}$$

Setter vi dette inn i den første ligningen får vi

$$\begin{aligned}\ln 0,3 &= \ln C + \frac{500}{3500} \ln \frac{4,1}{0,3} \\ \ln C &= \ln 0.3 - \frac{1}{7} \ln \frac{4,1}{0,3} \\ C &= \frac{0,3^{\frac{8}{7}}}{4,1^{\frac{1}{7}}}\end{aligned}$$

Dermed er kostnad som funksjon av dybde gitt ved

$$p(x) = \frac{0,3^{\frac{8}{7}}}{4,1^{\frac{1}{7}}} e^{\frac{1}{3500} \ln \frac{4,1}{0,3} x},$$

som gir $p(6000) \approx 18,3$ mill dollar som estimat for prisen å en brønn på 6000m.

OPPGAVE 6

a) Dette er integral av en rasjonal funksjon der orden i teller er høyere enn orden i nevner. Polynomdivisjon gir:

$$2x^3 + 2x + 4 : x^2 + 2x = 2x - 4 + \frac{10x + 4}{x^2 + 2x}$$

Delbrøkoppspalting av siste ledd gir

$$\frac{10x + 4}{x^2 + 2x} = \frac{10x + 4}{x(x + 2)} = \frac{2}{x} + \frac{8}{x + 2}$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 2x + 4}{x^2 + 2x} dx &= \int (2x - 4 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x + 2}) dx \\ &= x^2 - 4x + 2 \int \frac{1}{x} dx + 8 \int \frac{1}{x + 2} dx \\ &= x^2 - 4x + 2 \ln |x| + 8 \ln |x + 2| + C.\end{aligned}$$

b) I dette bestemte integralet eksisterer ikke integranden for den nedre grensen; dvs at integralet er uekte. Ved å benytte definisjonen har vi

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}dx &= \lim_{a\to 2}\int_a^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}dx} \\
&= \lim_{a\to 2}\int_{a^2-4}^{12} \frac{1}{\sqrt{u}}du \\
&= \lim_{a\to 2} 2\sqrt{u}|_{a^2-4}^{12} = 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

c) Lar $U(x) = x$ og $V'(x) = 2^x$. Det gir

$$\begin{aligned}
U'(x) &= 1 \\
V(x) &= \int 2^x dx = \int e^{\ln 2^x} dx = \int e^{x\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} e^{x\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}2^x
\end{aligned}$$

Delvis integrasjon med valget over gir

$$\begin{aligned}
\int x2^x dx &= U(x)V(x) - \int U'(x)V(x)dx \\
&= \frac{1}{\ln 2}x2^x - \int \frac{1}{\ln 2}2^x dx \\
&= \frac{1}{\ln 2}x2^x - \frac{1}{(\ln 2)^2}2^x + C.
\end{aligned}$$

OPPGAVE 7

Vi definerer funksjonen k som beskriver NO_2-konsentrasjonen som funksjon av tidspunkt, t, der $t \in [7, 19]$. Middelverdien til denne funksjonen er gitt ved

$$\bar{k} = \frac{1}{19-7}\int_7^{19} k(x)dx.$$

For å approksimere integralet som inngår i formelen, skal vi benytte Simpsons regel. Fra tabellen har vi at vi kjenner følgende funksjonsverdier:

$$\begin{aligned}
y_0 &= k(7) = 134,0 \\
y_1 &= k(9) = 157,1 \\
y_2 &= k(11) = 133,9 \\
y_3 &= k(13) = 160,8 \\
y_4 &= k(15) = 191,1 \\
y_5 &= k(17) = 164,7 \\
y_6 &= k(19) = 146,1
\end{aligned}$$

Differansen i tid mellom hvert målepunkt er $h = 2$. Simpsons regel gir

$$\begin{aligned}
\int_7^{19} k(x)dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\
&= \frac{2}{3}(134,0 + 4\cdot 157,1 + 2\cdot 133,9 + 4\cdot 160,8 + 2\cdot 191,1 + 4\cdot 164,7 + 146,6) \\
&\approx 1907,3.
\end{aligned}$$

Dette gir en approksimasjon til middelverdien

$$\bar{k} = \frac{1}{19-7}\int_7^{19} k(x)dx \approx \frac{1}{12}\cdot 1907,3 \approx 158,9.$$

En approksimasjon til middelverdien for NO_2-konsentrasjonen mellom kl. 7:00 og kl. 19:00 er derfor 158,9 μg/m^3, og klima og forurensningsdirektoratet ville karakterisert luften som dårlig i denne perioden.