UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT111 – Grunnkurs i matematikk I

Onsdag 19. mai 2010, kl. 9.00–14.00

Bokmål

Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten tydelig fremgår av besvarelsen.
Merk: Oppgavesettet har 4 sider (8 oppgaver).
Det kan være lurt å lese igjennom alle oppgavene før du begynner.

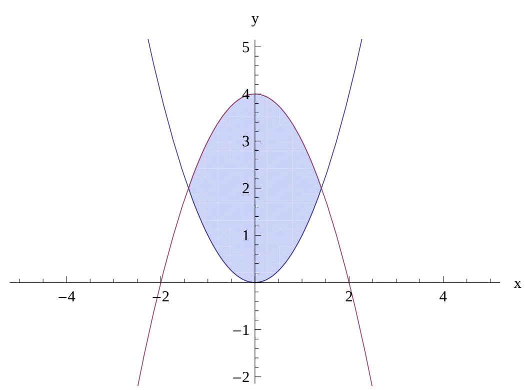
Hjelpemidler: Lærebok og kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

Oppgave 1

(a) La R være området mellom kurvene

$$y = x^2, \qquad y = 4 - x^2.$$

Finn arealet til R.



(b) For alle $c > 0$, vis at

$$\int_c^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{9}\left(c^3 - 1\right) - \frac{1}{3}c^3 \ln c\,.$$

Du skal vise utregningen, ikke bare slå opp i permen i læreboken.

(c) Løs det uekte integralet

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx\,,$$

eller vis at det divergerer. Hvis integralet divergerer mot ∞ eller $-\infty$, skal du også oppgi dette.

Oppgave 2

(a) Løs grenseverdien

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\cos^{-1} x}{x-1}\,,$$

eller vis at den ikke eksisterer. Hvis grenseverdien går mot ∞ eller $-\infty$, skal du også skrive dette.

(b) Bruk sekantsetningen (Mean Value Theorem) til å vise at hvis $x > 0$, da er

$$\tan^{-1} x < x. \tag{1}$$

(c) Bruk (1) til å løse grenseverdien

$$\lim_{x\to 0+} \tan^{-1}(x)\,\ln(x)\,,$$

eller vis at den ikke eksisterer. Hvis grenseverdien går mot ∞ eller $-\infty$, skal du også skrive dette.

(d) Bruk den formelle definisjonen ("ϵ-δ definisjonen") til å vise at

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Oppgave 3

(a) I denne deloppgaven kommer z og w alltid til å stå for de komplekse tallene

$$z = -1 - i \qquad \text{og} \qquad w = 4 - i.$$

(i) Regn ut (dvs. skriv på formen $a + ib$):

$$4\overline{z} + w \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}\,.$$

(ii) Skriv z^6 på formen $a + ib$.

(b) Finn alle $z \in \mathbb{C}$ som er en løsning på ligningen

$$z^3 = -8.$$

(c) Løs integralet

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^3+8}\,dx\,.$$

Løsningen i oppgave (b) kan være til hjelp når du skal faktorisere nevneren.

Oppgave 4

(a) La
$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt, \qquad x \in (0, \infty).$$
Finn $f'(x)$ og forklar hvorfor f er invertibel.

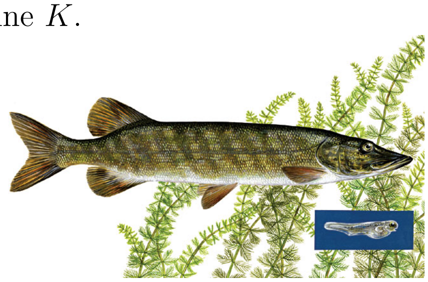
(b) Gi et eksempel på en funksjon g som **ikke** er invertibel, men likevel har $g'(x) > 0$ for alle x i definisjonsmengden til g.

Oppgave 5

En gruppe biologer har lenge jobbet med å få rense en innsjø som har vært ødelagt av forurensing. De er nå ferdig med med selve rensingen, og ønsker å gjenninnføre gjeddebestanden i innsjøen. De setter ut 20 gjedder i innsjøen. La antall gjedder i innsjøen ved tiden t være gitt med $y(t)$. Biologene vet at veksten av antall gjedder i innsjøen, er bestemt av differentsialligningen
$$\frac{dy}{dt} = y\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$
hvor $K > 0$ er en konstant. Tiden t er målt i år, og $t = 0$ representerer tidspunktet hvor de setter ut de 20 gjeddene.

(a) Finn $y(t)$ gitt ved t og K. Merk at
$$\frac{1}{y(1 - \frac{y}{K})} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K - y}.$$

(b) Forskerne antar at bestanden med tiden vil stabilisere seg på 1000 gjedder. Bruk dette til å finne K.



Gjedde

Oppgave 6

La

$$g(x) = 5\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{x}\right), \qquad x \in [3,5].$$

Funksjonen $g(x)$ oppfyller kravene til fikspunktteoremet (du trenger ikke vise dette).

Vis at $\sqrt{10}$ er et fikspunkt til $g(x)$.

Bruk fikspunktiterasjon for å finne en tilnærming til $\sqrt{10}$ ved å velge $x_0 = 5$ og gjennomføre 3 iterasjoner.

Oppgave 7

La

$$f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}.$$

(a) Hva er definisjonsmenden til $f(x)$? Begrunn uten regning at $f(x)$ har et absolutt maksimum og et absolutt minimum.

(b) Finn ut på hvilke(t) intervall $f(x)$ vokser, og på hvilke(t) intervall $f(x)$ avtar. Finn absolutt maksimum og absolutt minimum til $f(x)$.

Oppgave 8

La $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Bruk induksjon til å vise at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

LYKKE TIL!

Erlend Grong Trygve Johnsen