UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT111 – Grunnkurs i matematikk I
Løsningsforslag

Onsdag 19. mai 2010, kl. 9.00–14.00

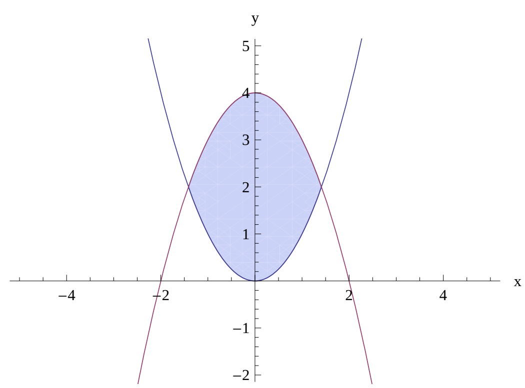
Bokmål

Oppgave 1

(a) La R være området mellom kurvene

$$y = x^2, \qquad y = 4 - x^2.$$

Finn arealet til R.



(b) For alle $c > 0$, vis at

$$\int_c^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{9}\left(c^3 - 1\right) - \frac{1}{3}c^3 \ln c\,.$$

Du skal vise utregningen, ikke bare slå opp i permen i læreboken.

(c) Løs det uekte integralet

$$\int_0^1 x^2 \ln x \, dx\,,$$

eller vis at det divergerer. Hvis integralet divergerer mot ∞ eller $-\infty$, skal du også oppgi dette.

Svar: Oppgave 1

(a) Området ligger mellom linjene $x = -\sqrt{2}$ og $x = \sqrt{2}$ (det vil si at $y = x^2$ og $y = 4 - x^2$ krysser i punktene $(-\sqrt{2}, 2)$ og $(\sqrt{2}, 2)$). Arealet er derfor

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - x^2 - x^2)\, dx = 2\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = 4\int_{0}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx$$
$$= 4\left(2x\Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{2}}\right) = 4\left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}(6-2) = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{2}}{3}}}\ .$$

Her har vi brukt at $2 - x^2$ er en jevn funksjon.

(b)

$$\int_c^1 x^2 \ln x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_c^1 - \frac{1}{3}\int_c^1 x^2\, dx$$
$$\begin{bmatrix} dV = x^2 dx & U = \ln x \\ V = \frac{1}{3}x^3 & dU = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}1^3 \ln 1 - \frac{1}{3}c^3 \ln c - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_c^1 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}c^3 \ln c - \frac{1}{9}(1 - c^3)}}\ .$$

(c)

$$\int_0^1 x^2 \ln x\, dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 x^2 \ln x\, dx = \lim_{c\to 0+}\left(\frac{1}{9}\left(c^3 - 1\right) - \frac{1}{3}c^3 \ln c\right)$$
$$= \frac{1}{9}\lim_{c\to 0+}\left(c^3 - 1\right) - \frac{1}{3}\lim_{c\to 0+}\left(c^3 \ln c\right) = \frac{1}{9}(0-1) - \frac{1}{3}\cdot 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}\ .$$

Her har vi bruk at $\lim_{c\to 0+} c^3 \ln c = 0$ som følger av kap 3.4 Teorem 5(d) eller ved å bruke l'Hôpital.

Oppgave 2

(a) Løs grenseverdien

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\cos^{-1} x}{x-1}\,,$$

eller vis at den ikke eksisterer. Hvis grenseverdien går mot ∞ eller $-\infty$, skal du også skrive dette.

(b) Bruk sekantsetningen (Mean Value Theorem) til å vise at hvis $x > 0$, da er

$$\tan^{-1} x < x. \tag{1}$$

(c) Bruk (1) til å løse grenseverdien

$$\lim_{x\to 0+} \tan^{-1}(x)\,\ln(x)\,,$$

eller vis at den ikke eksisterer. Hvis grenseverdien går mot ∞ eller $-\infty$, skal du også skrive dette.

(d) Bruk den formelle definisjonen ("ϵ-δ definisjonen") til å vise at

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,.$$

Svar: Oppgave 2

(a) $\lim_{x\to 1-} \frac{\cos^{-1} x}{x-1}$ er av type $\left[\frac{0}{0}\right]$ og $\frac{d}{dx}(x-1) = 1 \neq 0$. Vi kan derfor bruke l'Hôpitals første regel.

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\cos^{-1} x}{x-1} \overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = -\lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\underline{-\infty}}\,.$$

(b) Hvis $x > 0$ og $f(x) = \tan^{-1} x$, vet vi fra sekantsetningen at det finnes en $c \in (0, x)$, slik at

$$\frac{\tan^{-1} x}{x} = \frac{\tan^{-1} x - \tan^{-1} 0}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1.$$

Dermed er $\tan^{-1} x < x$.

(c) Siden $0 < \tan^{-1} x < x$ når $x \in (0, \infty)$, og at

$$\lim_{x\to 0+} 0 \cdot \ln x = \lim_{x\to 0+} x \ln x = 0\,,$$

vet vi fra Klem-teoremet (The Squeeze Theorem) at $\lim_{x\to 0+} \tan^{-1} x \ln x = 0$.

Vi vet at $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$ fra kap 3.4 Teorem 5(d) eller ved å bruke l'Hôpital.

(d) Velg $\delta = \min\{1, \epsilon\}$. Siden $|x-1| < \delta \leq 1$, vet vi at

$$|x-1| < 1\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 < x-1 < 1\,, \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 < x+1 < 3\,,$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 > \tfrac{1}{x+1} > \tfrac{1}{3}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \tfrac{1}{|x+1|} < 1\,.$$

Vi bruker dette og finner at

$$\left|\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2(x-1)-(x^2-1)}{2(x^2-1)}\right| = \left|\frac{-x^2+2x-1}{2(x^2-1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < \frac{1}{2}|x-1| < \frac{1}{2}\delta \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon\,.$$

Oppgave 3

(a) I denne deloppgaven kommer z og w alltid til å stå for de komplekse tallene

$$z = -1 - i \qquad \text{og} \qquad w = 4 - i.$$

(i) Regn ut (dvs. skriv på formen $a + ib$):

$$4\overline{z} + w \quad \text{og} \quad \frac{z}{w}\,.$$

(ii) Skriv z^6 på formen $a + ib$.

(b) Finn alle $z \in \mathbb{C}$ som er en løsning på ligningen

$$z^3 = -8.$$

(c) Løs integralet

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^3+8}\,dx\,.$$

Løsningen i oppgave (b) kan være til hjelp når du skal faktorisere nevneren.

Svar: Oppgave 3

(a) (i)

$$4\overline{z} + w = 4(-1+i) + 4 - i = -4 + 4i + 4 - i = \underline{\underline{3i}}\,,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{-1-i}{4-i} = \frac{(-1-i)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{-4-4i-i+1}{16+1}$$
$$= \frac{-3-5i}{17} = \underline{\underline{-\frac{3+5i}{17}}}\,.$$

(ii) Vi vet at $|z| = \sqrt{2}$ og $\operatorname{Arg}(z) = -\frac{3\pi}{4}$. Da vet vi at

$$|z^6| = |z|^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8,$$

$$\arg(z) = 6\,\arg(z) = -\frac{9\pi}{2} = -4\pi - \frac{\pi}{2}\,.$$

Dermed er

$$z^6 = 8\left(\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{-8i}}\,.$$

(b) Vi vet at

$$|-8| = 8, \qquad \operatorname{Arg}(-8) = \pi.$$

Dermed vil alle løsninger z oppfylle $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$. De er

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{1 + i\sqrt{3}}}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = \underline{\underline{-2}}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\cdot 2\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\cdot 2\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{+} i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \underline{\underline{1 - i\sqrt{3}}}\,. \end{aligned}$$

(c) Fra (b) og faktorteoremet, vet vi at

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= (x+2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3}) \\ &= (x+2)(x^2 - (1 + i\sqrt{3})x - (1 - i\sqrt{3})x + 1 + 3) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4). \end{aligned}$$

Alternativt kan vi bruke at -2 er en rot og bruke polynomdivisjon for å faktorisere. Uansett, så finner vi

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x^3+8} &= \frac{x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \\ &= \frac{A(x^2-2x+4) + Bx(x+2) + C(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A+2B+C)x + 4A + 2C}{(x+2)(x^2-2x+4)}\,. \end{aligned}$$

Vi må derfor løse

$$A + B = 0, \qquad -2A + 2B + C = 1, \qquad 4A + 2C = -2\,.$$

Disse har løsning

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{3}\,.$$

Vi vet dermed at

$$\frac{x-2}{x^3+8} = -\frac{\frac{1}{3}}{x+2} + \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2-2x+4} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+4}\,.$$

Vi regner ut integralet

$$\int_0^1 \frac{x-2}{x^3+8}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+4}dx.$$

$$\begin{bmatrix} u = & x^2-2x+4 & & u(0) = & 4 \\ du = & 2x-2 = 2(x-1) & & u(1) = & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+2|\Big|_0^1 + \frac{1}{6}\int_4^3 \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln(3)-\ln(2)\right) + \frac{1}{6}\ln|u|\Big|_4^3$$

$$= -\tfrac{1}{3}\ln\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{6}\left(-2\ln\tfrac{3}{2} + \ln\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{1}{6}\left(\ln\tfrac{4}{9} + \ln\tfrac{3}{4}\right)$$

$$= \tfrac{1}{6}\ln\left(\tfrac{4}{9}\cdot\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{1}{3} = \underline{\underline{-\tfrac{1}{6}\ln 3}}\ .$$

Oppgave 4

(a) La

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt, \qquad x \in (0, \infty).$$

Finn $f'(x)$ og forklar hvorfor f er invertibel.

(b) Gi et eksempel på en funksjon g som **ikke** er invertibel, men likevel har $g'(x) > 0$ for alle x i definisjonsmengden til g.

Svar: Oppgave 4

(a)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{t^2} dt = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{x^4} > 0,$$

for alle $x \in (0, \infty)$. Siden $f(x)$ er definert på et sammenhengende intervall og er voksende der, er $f(x)$ en-til-en og har derfor en invers.

(b) For eksempel $g(x) = x - \frac{1}{x}$. Da har vi at

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0\,,$$

men $g(1) = g(-1) = 0$.

Oppgave 5

En gruppe biologer har lenge jobbet med å få rense en innsjø som har vært ødelagt av forurensing. De er nå ferdig med med selve rensingen, og ønsker å gjenninnføre gjeddebestanden i innsjøen. De setter ut 20 gjedder i innsjøen. La antall gjedder i innsjøen ved tiden t være gitt med $y(t)$. Biologene vet at veksten av antall gjedder i innsjøen, er bestemt av differentsialligningen

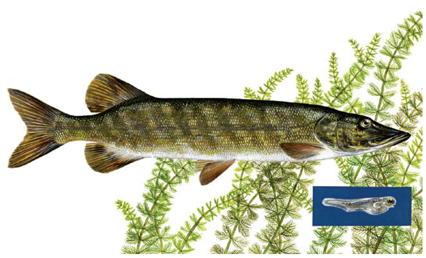
$$\frac{dy}{dt} = y\left(1 - \frac{y}{K}\right),$$

hvor $K > 0$ er en konstant. Tiden t er målt i år, og $t = 0$ representerer tidspunktet hvor de setter ut de 20 gjeddene.

(a) Finn $y(t)$ gitt ved t og K. Merk at

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{K})} = \frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}.$$

(b) Forskerne antar at bestanden med tiden vil stabilisere seg på 1000 gjedder. Bruk dette til å finne K.



Gjedde

Svar: Oppgave 5

(a) Vi har konstante løsninger, $y = 0$ og $y = K$. Ellers har vi

$$\int \frac{dy}{y(1-\frac{y}{K})} = \int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{K-y}$$

$$= \ln|y| - \ln|K-y| = \ln\left|\frac{y}{K-y}\right| = t + c.$$

Dermed er

$$\frac{y}{K-y} = Ce^t, \qquad C = \pm e^c \neq 0.$$

Løser vi dette, få vi

$$y(t) = \frac{KCe^t}{1+Ce^t}.$$

Setter vi $C = 0$, får vi den konstante løsningen $y = 0$. Dermed får vi at alle løsningene er

$$y(t) = \frac{KCe^t}{1 + Ce^t}\,, \qquad C \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

og $y(t) = K$.

La oss nå bruke betingelsen $y(0) = 20$. Vi har kun en konstant løsning hvis $K = 20$.

Hvis $K \neq 20$, finner vi at

$$y(0) = 20 = \frac{KC}{1 + C}\,, \quad \Rightarrow \quad C = \frac{20}{K - 20}.$$

Setter vi dette inn i (2), får vi

$$y(t) = \frac{\frac{20}{K-20}Ke^t}{1 + \frac{20}{K-20}e^t} = \frac{20Ke^t}{K - 20 + 20e^t} = \frac{20Ke^t}{K + 20\,(e^t - 1)}\,.$$

(b) Hvis $y(t) = 20$, vil selvfølgelig også $\lim_{t\to\infty} y(t) = 20$, så dermed vet vi at $K \neq 20$. Vi regner ut grenseverdien for de andre løsningene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{20Ke^t}{K + 20\,(e^t - 1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{20K}{Ke^{-t} + 20\,(1 - e^{-t})} \\ &= \frac{20K}{20} = K.\end{aligned}$$

Derfor vet vi at $K = 1000$. Den endelige formen for $y(t)$ er

$$y(t) = \frac{20000e^t}{1000 + 20(e^t - 1)} = \frac{1000e^t}{50 + (e^t - 1)} = \frac{1000e^t}{49 + e^t}.$$

Oppgave 6

La
$$g(x) = 5\left(\frac{x}{10} + \frac{1}{x}\right), \qquad x \in [3,5]\,.$$
Funksjonen $g(x)$ oppfyller kravene til fikspunktteoremet (du trenger ikke vise dette).

Vis at $\sqrt{10}$ er et fikspunkt til $g(x)$.

Bruk fikspunktiterasjon for å finne en tilnærming til $\sqrt{10}$ ved å velge $x_0 = 5$ og gjennomføre 3 iterasjoner.

Svar: Oppgave 6

$$g(\sqrt{10}) = 5\left(\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 5\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 5\frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}\,,$$
altså et fikspunkt. Vi gjør 3 iterasjoner.
$$\begin{aligned}
x_0 &= 5\,,\\
x_1 &= g(5) = \frac{7}{2}\,,\\
x_2 &= g(\tfrac{7}{2}) = \frac{89}{28} \quad (\approx 3,17857)\,,\\
x_3 &= g(\tfrac{89}{28}) = \frac{15761}{4984} \quad (\approx 3,16232)\,.
\end{aligned}$$

Oppgave 7

La

$$f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}.$$

(a) Hva er definisjonsmenden til $f(x)$? Begrunn uten regning at $f(x)$ har et absolutt maksimum og et absolutt minimum.

(b) Finn ut på hvilke(t) intervall $f(x)$ vokser, og på hvilke(t) intervall $f(x)$ avtar. Finn absolutt maksimum og absolutt minimum til $f(x)$.

Svar: Oppgave 7

(a) $f(x)$ er kun definert på det lukkede intervallet $[-1,1]$, siden det er bare der at $1-x^2 \geq 0$. $f(x)$ er også kontinuerlig, siden $\sqrt{x}$, $1-x^2$ og $x-1$ er kontinuerlig, og komposisjoner og multiplikasjoner av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige.

Funksjoner som er kontinuerlige og definert på lukkede intervall har et absolutt maksimum og et absolutt minimum fra Maks-Min teoremet.

(b)

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{(x-1)x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x^2+x+1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Vi tegner opp fortegnslinje

	$(-1,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},1)$
-2	$-$	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$-$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$\sqrt{1-x^2}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

f avtar på $[-1,-\frac{1}{2}]$ og vokser på $[-\frac{1}{2},1]$.
Absolutt minimum er derfor $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Absolutt maksimum er $f(-1) = f(1) = 0$.

Oppgave 8

La $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$. Bruk induksjon til å vise at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}}\ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Svar: Oppgave 8

Vi gjennomfører et vanlig induksjonsbevis

(i) $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3} = \frac{(-1)^1 \cdot 2!}{(1+x)^{1+2}}$ så formelen gjelder for $n = 1$.

(ii) Anta at formelen (3) gjelder for $n = k \geq 1$. Da vet vi at

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{(-1)^k \cdot (k+1)!}{(1+x)^{k+2}} &= (-1)^k \cdot (k+1)! \frac{d}{dx} \frac{1}{(1+x)^{k+2}} \\ &= (-1)^k \cdot (k+1)! \frac{-(k+2)}{(1+x)^{k+3}} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+2)!}{(1+x)^{k+3}} \\ &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot ((k+1)+1)!}{(1+x)^{(k+1)+2}}. \end{aligned}$$

Altså vil da formelen også gjelde for $n = k+1$.

Fra (i) og (ii) og induksjon vet vi at

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n+1)!}{(1+x)^{n+2}},$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.