LØSNINGSFORSLAG

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
torsdag 15.desember 2011 kl. 09:00-14:00

OPPGAVE 1

a) Modulus:

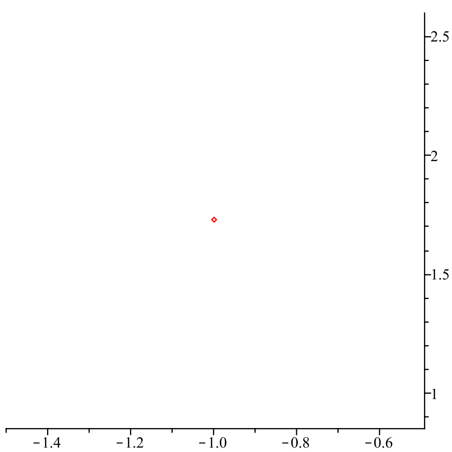
$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

Argument for $0 \leq \arg(w) < 2\pi$:

$$\mathrm{Arg}(w) = \frac{2\pi}{3}.$$

Dette gir:

$$z = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})).$$



b) Skriver om høyre side av ligningen:

$$-8(1 - i\sqrt{3}) = 8(-1 + i\sqrt{3})$$

Benytter omskrivningen av $(-1 + i\sqrt{3})$ som vi fant i a), og har da at løsningene av ligningen må oppfylle

$$w_n^4 = 8 \cdot 2\Big(\cos\Big(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big)\Big), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

Finner eksplisitt uttrykk for kubikkrøttene ved å benytte de'Moivres formel:

$$\begin{aligned} w_n^4 &= 16^{\frac{1}{4}}\Big(\cos(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big) + i\sin\Big(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\Big)\Big)^{\frac{1}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \\ &= 2\Big(\cos\Big(\frac{\pi(1+3n)}{6}\Big) + i\sin\Big(\frac{\pi(1+3n)}{6}\Big)\Big), \quad n = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Løsningen av ligningen er dermed de komplekse tallene:

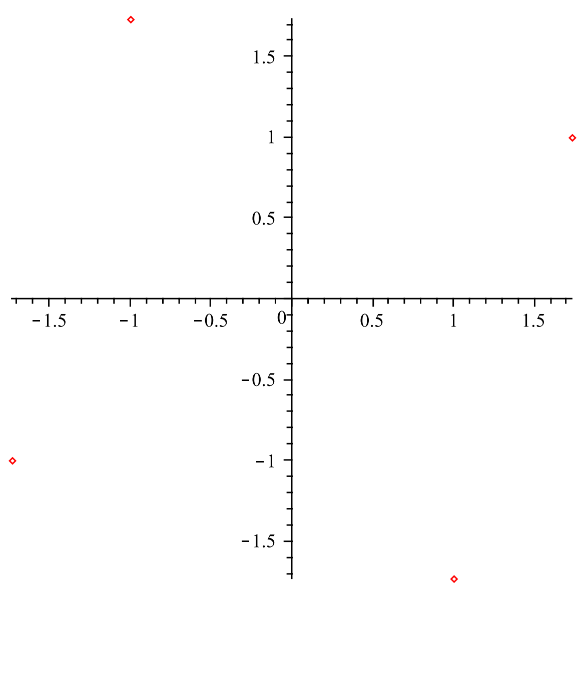
$$
\begin{aligned}
w_1 &= 2\Big(\cos\left(\frac{\pi(1+3\cdot 0)}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi(1+3\cdot 0)}{6}\right)\Big) = \sqrt{3}+i,\\
w_2 &= 2\Big(\cos\left(\frac{\pi(1+3\cdot 1)}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi(1+3\cdot 1)}{6}\right)\Big) = -1+\sqrt{3}i,\\
w_3 &= 2\Big(\cos\left(\frac{\pi(1+3\cdot 2)}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi(1+3\cdot 2)}{6}\right)\Big) = -\sqrt{3}-i,\\
w_4 &= 2\Big(\cos\left(\frac{\pi(1+3\cdot 3)}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi(1+3\cdot 3)}{6}\right)\Big) = 1-\sqrt{3}i.
\end{aligned}
$$

Alternativ:
Finner prinsipalrot:

$$w_1 = 16^{\frac{1}{4}}\Big(\cos\left(\frac{2\pi}{3\cdot 4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3\cdot 4}\right)\Big) = \sqrt{3}+i.$$

De andre løsningene finnes ved å rotere den foregående roten med $\frac{\pi}{2}$, siden løsningen skal ligge jevnt fordelt på en sirkel i det komplekse planet. Denne rotasjonen svarer til en multiplikasjon av roten med et komplekst tall med argument lik $\frac{\pi}{2}$ og modulus lik 1, dvs tallet i. Dette gir de andre løsningene:

$$
\begin{aligned}
w_2 &= w_1\cdot i = (\sqrt{3}+i)i = -1+\sqrt{3}i,\\
w_3 &= w_2\cdot i = (-1+\sqrt{3}i)i = -\sqrt{3}-i,\\
w_4 &= w_3\cdot i = (-\sqrt{3}-i)i = 1-\sqrt{3}i.
\end{aligned}
$$



OPPGAVE 2

a)

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\sin(x-3)}{|x-3|} = \lim_{x\to 3^-} -\frac{\sin(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} -\frac{\cos(x-3)}{1} = -1$$

I den siste overgangen er l'Hôpitals regel benyttet. Alternativ kunne man benyttet direkte at $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

b) Gitt $\epsilon > 0$. Vil finne $\delta > 0$ slik at hvis $0 < |x-2| < \delta$, så er $|x^2 - 6x - (-8)| < \epsilon$.

$$|x^2 - 6x - (-8)| = |(x-2)(x-4)| \le |x-2||x-4|$$

Har at $|x-2| < \delta$. For å finne en begrensning på $|x-4|$ antar vi at $\delta \le 1$ og benytter trekantulikheten:

$$|x-4| = |(x-2)-2| \le |x-2| + 2 \le 1 + 2 = 3.$$

Altså er

$$|x^2 - 6x - (-8)| <= |x-2||x-4| < \delta \cdot 3 \qquad \text{hvis } \delta \le 1.$$

Velger $\delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\}$. Har da to tilfeller. For $\epsilon \ge 3$ velger vi $\delta = 1$ og får

$$|x^2 - 6x - (-8)| < 3|x-2| < 3 \cdot 1 \le \epsilon.$$

For $\epsilon < 3$ velger vi $\delta = \epsilon/3$ og får

$$|x^2 - 6x - (-8)| < 3|x-2| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Dermed er

$$|x^2 - 4x - (-8)| < \epsilon \qquad \text{hvis } |x-2| < \delta = \min\{\frac{\epsilon}{3}, 1\},$$

og dette viser at $\lim_{x\to 2}(x^2 - 6x) = 8$.

OPPGAVE 3

a) Separabel differensialligning som beskriver antall smittede barn $y(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = ky\Big(1 - \frac{y}{100}\Big).$$

Skriver om ligningen

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{100})}\frac{dy}{dt} = k.$$

Integrerer begge sider med hensyn å t og løser for $y(t)$:

$$\int \frac{1}{y(1-\frac{y}{100})}\frac{dy}{dt}dt = \int kdt,$$
$$\int \frac{1}{y(1-\frac{y}{100})}dy = \int kdt,$$

Delbrøppspalting av brøk på venstre side:

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{100})}=\frac{A}{y}+\frac{B}{(1-\frac{y}{100})}=\frac{A-\frac{A}{100}y+By}{y(1-\frac{y}{100})}\quad\Rightarrow\quad A=1, B=\frac{1}{100}.$$

Dette gir den integrerte ligningen

$$\begin{aligned}
&\int\Big(\frac{1}{y}+\frac{1}{100(1-\frac{y}{100})}\Big)dy=\int kdt,\\
&\ln y-\ln(1-\frac{y}{100})=kt+\hat{C}\\
&\ln\frac{y}{1-\frac{y}{100}}=kt+\hat{C}\\
&\frac{y}{1-\frac{y}{100}}=e^{kt+\hat{C}}
\end{aligned}$$

Lar $\quad\bar{C}=e^{\hat{C}}$, og løser for $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t)=&\frac{\bar{C}e^{kt}}{(1+\frac{\bar{C}e^{kt}}{100})}=\frac{100}{\frac{100}{\bar{C}}e^{-kt}+1},\quad (C=\frac{100}{\bar{C}})\\
=&\frac{100}{1+Ce^{-kt}}.
\end{aligned}$$

Alternativt:
Man kan også vise at det oppgitte uttrykket er en løsning av ligningen ved å vise at man får det samme uttrykket på høyre og venstre side av ligningen ved innsetting.

b) Informasjonen i teksten gir $y(0)=1$ og $y(1)=4$. Dette brukes til å finne konstantene k og C.

$$1=\frac{100}{1+C}\quad\Rightarrow\quad C=99,\qquad 4=\frac{100}{1+99e^{-k}}\quad\Rightarrow\quad k=-\ln(\frac{8}{33}),$$

som gir

$$y(t)=\frac{100}{1+99e^{\ln(\frac{8}{33})\cdot t}}=\frac{100}{1+99(\frac{8}{33})^t}.$$

Løser ligningen $y(t)=50$ for å finne ut hvor lang tid det tar før halvparten av barna er smittet

$$\frac{100}{1+99e^{\ln(\frac{8}{33})\cdot t}}=50\quad\Rightarrow\quad t=-\frac{\ln(99)}{\ln(\frac{8}{33})}\approx 3,24$$

Det tar litt over tre dager før halvparten av barna er smittet (som betyr at halvparten av barna er smittet i løpet av torsdagen).

OPPGAVE 4

a) Dersom vindavkjølingsindeksen skal være konstant, må vi ha $\frac{dW}{dt}=0$. Deriverer for å finne uttrykk for $\frac{dW}{dt}$:

$$\frac{dW}{dt}=0,6251\frac{dT}{dt}-1,8192\cdot V^{-0,84}\cdot\frac{dV}{dt}+0,3965\cdot\frac{dT}{dt}V^{0,16}+0,06344\cdot T\cdot V^{-0,84}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

Setter inn for $\frac{dW}{dt}=0,\ T=-15,\ \frac{dT}{dt}=-1,5$ og V =36 km/h:

$$0=0,6251\cdot(-1,5)-1,8192\cdot 36^{-0,84}\cdot\frac{dV}{dt}+0,3965\cdot(-1,5)\cdot 36^{0,16}+0,06344\cdot(-15)\cdot 36^{-0,84}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

Dette gir

$$\frac{dV}{dt} = -14.59$$

Vinden må løye med en rate på $14,59$ km/h per time, dvs $14,59$ km/h^2.

b) Ved konstant temperatur på $-15°$C er vindavkjølingsindeksen gitt ved

$$\hat{W}(V) = 13,12+0,6215\cdot(-15)-11,37\cdot V^{0,16}+0,3965\cdot(-15)\cdot V^{0,16} = 3,7975-17,3175V^{0.16}.$$

For å finne lineærapproksimasjon og feilledd trenger vi den første og andrederiverte:

$$\hat{W}'(V) = -2,7708V^{-0.84},$$
$$\hat{W}''(V) = 2,3275V^{-1.84}.$$

Vi har videre at $\hat{W}(36) = -26,93$ og $\hat{W}'(36) = -0,1366$. Dette gir lineærapproksimasjonen

$$L(x) = -26,93 - 0,1366(V-36) = -22,01 - 0,1366V,$$

med feilledd

$$\hat{W}(V) - L(x) = \frac{W''_{T=-15}(s)}{2}(V-36)^2 = 1,1637s^{-1.84}(V-36)^2,$$

som alltid vil være positivt. Det betyr at lineærapproksimasjonen alltid vil gi en for liten verdi for $\hat{W}$.

OPPGAVE 5

Løsning

a) Dersom f skal være kontinuerlig for $x = 0$ må vi ha at

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Siden $(x-1)^2e^x$ er kontinuerlig ser vi med en gang at vi må ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$. Venstresidig grense er

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x^3 + 3x + 1 = 1,$$

som betyr at f er kontinuerlig.

Dersom f skal være deriverbar i 0, får vi fra definisjonen av den deriverte i et punkt at grensen

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

må eksistere.

Undersøker høyre og venstresidig grense:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^3 + 3h + 1 - 1}{h} = 3,$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h-1)^2e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(h^2-1)e^h}{1} = -1,$$

der l'Hôpitals' regel er benyttet i den nest siste overgangen. Dette betyr at grensen ikke eksisterer, og f er dermed ikke deriverbar for $x = 0$.

b) Kandidater for absolutte og lokale ekstremalpunkter for f er endepunkt, singulære punkt og kritiske punkter. Vi har et singulært punkt for $x = 0$, og endepunktene er $x = -2$ og $x = 2$. Finner kritiske punkter ved å studere f':

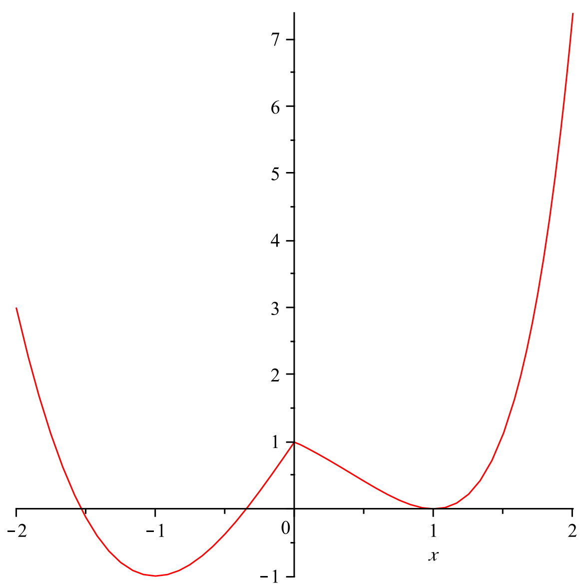
$$f'(x) = \begin{cases} 3(1-x^2), & -2 \leq x < 0, \\ (x^2-1)e^x, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Vi har kritiske punkter for $x = -1$ og $x = 1$. Videre har vi at f er voksende på intervallene $[-1, 0]$ og $[1, 2]$ og minkende på intervallene $[-2, -1]$ og $[0, 1]$. Det betyr at vi har lokale ekstremalpunkter for $x = -2, x = -1, x = 0, x = 1$ og $x = 2$. Ved å sjekke funksjonsverdier finner vi at vi har absolutt minimum for $x = -1$, og absolutt maksimum for $x = 2$.

c) For å finne vendepunkter må vi studere f'':

$$f''(x) = \begin{cases} -6x, & -2 \leq x < 0, \\ (x^2+2x-1)e^x, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Siden f'' eksisterer overalt bortsett fra for $x = 0$ der f ikke er deriverbar, vil vendepunkter være der $f'' = 0$. Dette gir vendepunkt for $x = -1 + \sqrt{2}$.



OPPGAVE 6

a) Benytter substitusjonen $u^2 = x$, som gir at $2udu = dx$:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{2u}{2u(1+u^2)}du = \int \frac{1}{(1+u^2)}du = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1} \sqrt{x} + C.$$

b) Integralet er uekte siden integranden er ubegrenset nær $x = 0$, og det deles inn i to uekte integraler:

$$\int_{-4}^{4} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-4}^{0} \frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{4} \frac{1}{x^2}dx.$$

Dersom integralet på venstre side skal konvergere, må begge integralene på høyre side konvergere. Siden vi har

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^4 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{c\to 0+} -\frac{1}{x}\Big|_c^4 = \lim_{c\to 0+}(-\frac{1}{4}+\frac{1}{c}) = \infty$$

vil integralet divergere.

c)

$$\begin{aligned}(1+x)y' + y &= (1+x)^2\\ [(1+x)y]' &= (1+x)^2,\\ (1+x)y &= \int (1+x)^2 dx = \frac{1}{3}(1+x)^3 + C,\\ y &= \frac{\frac{1}{3}(1+x)^3 + C}{1+x}.\end{aligned}$$

Alternativ:
Skriver om ligningen:

$$y' + \frac{1}{1+x}y = (1+x).$$

Integrerende faktor er

$$\mu(x) = \int \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x).$$

Løsningen er da gitt ved

$$y(x) = e^{-\mu(x)}\int e^{\mu(x)}(1+x)dx = \frac{\frac{1}{3}(1+x)^3 + C}{1+x}.$$

Inga Berre   Hilde Kristine Hvidevold   Trine Mykkeltvedt