BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
onsdag 18.mai 2011 kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemiddler: "R. A. Adams, Calculus - A complete course" og kalkulator uten grafisk display, som ikke kan programmeres.

Antall deloppgaver: 15

OPPGAVE 1

Gitt de komplekse tallene

$$z = \sqrt{3} + i, \qquad w = -1 + i$$

a) Regn ut (skriv på formen $a + bi$)

$$\text{(i) } \bar{z} + 3w, \qquad \text{(ii) } \frac{z}{w}, \qquad \text{(iii) } w^4.$$

b) Finn alle $z \in \mathbb{C}$ som oppfyller ligningen

$$z^4 = -16$$

OPPGAVE 2

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2|x-1|}{x^2 - 1}.$$

b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos^2 x}.$$

c) For hvilke verdier av a og b vil funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + 1 & \text{viss } x < 0 \\ be^{2x} + ax & \text{viss } x \geq 0 \end{cases}$$

være deriverbar for alle x?

OPPGAVE 3

La h(x) $= (8+3x)^{1/3}$.

a) Vis at Taylorpolynomet $P_3(x)$ av grad 3 til h(x) rundt punktet $x=0$ er gitt ved

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{768}x^3.$$

Bruk $P_3(x)$ til å regne ut en tilnærmet verdi for $11^{1/3}$.

b) Finn restleddet $E_3(x)$ til Taylorpolynomet i a), og bruk dette til å gi et minst mulig intervall som inneholder $11^{1/3}$.

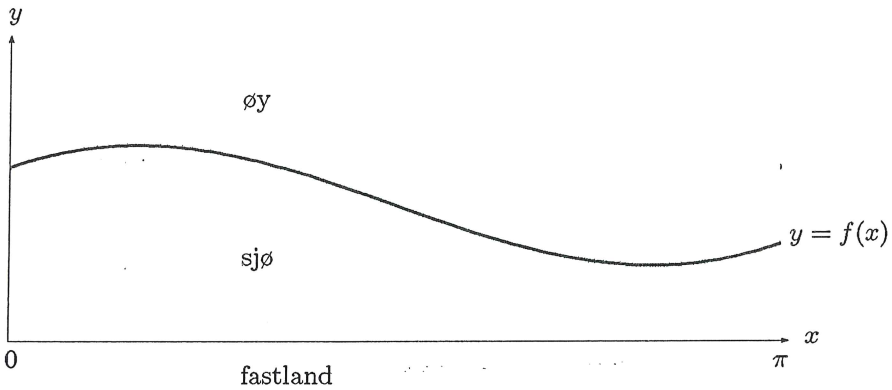
c) Finn en approksimasjon til $11^{1/3}$ ved å bruke tre iterasjoner med Newtons metode med startpunkt $x_0 = 3/2$ på en passende funksjon. Grunngi om verdien er for stor eller for liten i forhold til den nøyaktige verdien uten å bruke kalkulator.

OPPGAVE 4

Det skal bygges en bro fra fastlandet til en øy utenfor. Strandlinjen til fastlandet har funksjonen $y=0$ mens strandlinjen til øya vi ser på har funksjonen

$$y = f(x) = \frac{1}{4}\cos x + \frac{x}{8},$$

der både x og y er avstander i km. Vi ser på intervallet $x \in [0\ \pi]$.



På dette intervallet skal det bygges en bro fra fastlandet og over til øyen. Det er billigst å bygge kortest mulig bro. Modeller fra hvilket punkt $(x,y) = (x,0)$ på fastlandet det er minst kostnader med å bygge broen.

OPPGAVE 5

Du vil løpe deg en tur, men du er avhenging av musikk for å holde motivasjonen oppe mens du løper. Før du legger ut på tur vil du vil du finne ut hvor lenge du kan løpe før mp3 spilleren din slår seg av. Når spilleren er på vil batterikapasiteten, B, minke med en rate som er proporsjonal med antall minutter, t, som går. Dette kan modelleres med differensialligningen

$$\frac{dB}{dt} = aB,$$

der a er proporsjonalitetskonstanten.

Når du slår på spilleren er batterikapasiteten på 70%, etter 5 minutter er den på 60%. 20 minutter etter at du slår på spilleren starter du å løpe. Hvor lenge kan du løpe før spilleren slår seg av, hvis den må ha 5% batterikapasietet for å kunne spille musikk?

OPPGAVE 6

a) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int e^{x} \sin x \, \mathrm{dx}$$

b) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 4} \, \mathrm{dx}$$

c) Regn ut integralet

$$\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{(x+2)^{2/3}}$$

d) Finn volumet til legemet som blir skapt når området begrenset av $y = \cos x$ og $y = \sin x$ blir rotert rundt x-aksen, mellom $x = 0$ og $x = \pi/4$.

OPPGAVE 7

I denne oppgaven skal vi se på nasjonale CO_2 utslipp ~~i perioden~~ 1980-2010. Statistisk sentralbyrå og Klima- og forurensingsdirektoratet har en oversikt over CO_2 utslipp i millioner tonn per år. Tabellen under er et utdrag av denne oversikten :

År	CO_2-utslepp
1980	31.7 mill. tonn
1985	32.7 mill. tonn
1990	34.8 mill. tonn
1995	37.8 mill. tonn
2000	41.7 mill. tonn
2005	43.3 mill. tonn
2010	42.8 mill. tonn

Bruk dette utdraget sammen med Trapesregelen til å estimere totalt CO_2 utslipp i perioden 1980-2010.

Trine Mykkeltvedt Hilde Kristine Hvidevold Inga Berre