NYNORSK

LYØSINGSFORSLAG
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
onsdag 18. mai 2011 kl. 09:00-14:00

OPPGAVE 1

Gitt dei komplekse tala

$$z = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad w = -1 + \mathrm{i}$$

a) *Rekn ut (skriv på forma* $a + b\mathrm{i}$*)*

$$\text{(i) } \bar{z} + 3w, \qquad \text{(ii) } \frac{z}{w}, \qquad \text{(iii) } w^4.$$

(i) $\bar{z} + 3w = (\sqrt{3} - \mathrm{i}) + 3(-1 + \mathrm{i}) = \underline{(\sqrt{3} - 3) + 2\mathrm{i}}$

(ii) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\sqrt{3} + \mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i}} \dfrac{(-1 - \mathrm{i})}{(-1 - \mathrm{i})} = \dfrac{-\sqrt{3} + 1 - \mathrm{i}(\sqrt{3} + 1)}{1 - \mathrm{i} + \mathrm{i} + 1} = \underline{\dfrac{-\sqrt{3} + 1}{2} - \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}\mathrm{i}}$

(iii) $|w| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \qquad \mathrm{Arg}(w) = \pi - \tan^{-1}(1) = \frac{3\pi}{4}$
På polarform gir dette :

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ w^4 &= \sqrt{2}^4 \left(\cos(3\pi) + \mathrm{i}\sin(3\pi)\right) \\ w^4 &= \underline{-4} \end{aligned}$$

b) *Finn alle* $z \in \mathbb{C}$ *som oppfyller likninga*

$$z^4 = -16$$

Har at $|-16| = 16$ og at $\arg(-16) = \pi + 2\pi k$, på polarform:

$$z_k^4 = 16\left(\cos(\pi + 2\pi k) + \mathrm{i}\sin(\pi + 2\pi k)\right).$$

z som oppfyller likninga $z^4 = -16$ blir då:

$$z_k = (16)^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \underline{\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})} \\ z_1 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right) = \underline{\sqrt{2}(-1 + \mathrm{i})} \\ z_2 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5\pi}{4}\right)\right) = \underline{-\sqrt{2}(1 + \mathrm{i})} \\ z_3 &= 2\left(\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{7\pi}{4}\right)\right) = \underline{\sqrt{2}(1 - \mathrm{i})} \end{aligned}$$

OPPGÅVE 2

a) *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2|x-1|}{x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2|x-1|}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2|x-1|}{(x-1)(x+1)}$$

når x går mot 1 frå venstre side vil x alltid vere mindre enn 1 og $x-1$ vil vere negativ, slik at $\lim_{x\to 1^-} |x-1| = -(x-1)$ og

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2|x-1|}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(-(x-1))}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{(x+1)} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$$

b) *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos^2 x}.$$

Vi har ei grense på ubestemt form $[\frac{0}{0}]$, sidan $f(x) = (e^{x^2}-1)$ og $g(x) = (1-\cos^2 x)$ er deriverbar for alle x, og $g'(x) \neq 0$ i ein omegn om 0 utanom i 0, kan vi bruke l'Hopitals regel

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(e^{x^2}-1)}{\frac{d}{dx}(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2xe^{x^2}}{2\sin x\cos x} \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vi har fremleis ei grense på ubestemt form, og sidan $2xe^{x^2}$ og $2\sin x\cos x$ er deriverbare for alle x, og $\frac{d}{dx}(2\sin x\cos x) \neq 0$ i ein omegn on 0, kan me nytte l'Hoptials regel ein gang til

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(2xe^{x^2})}{\frac{d}{dx}2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}{2(\cos^2 x-\sin^2 x)} = \frac{2+0}{2(1+0)} = \underline{\underline{1}}$$

c) *For kva verdier av a og b vil funksjonen*

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + 1 & \textit{viss } x < 0 \\ be^{2x} + ax & \textit{viss } x \geq 0 \end{cases}$$

vere deriverbar for alle x?

$f(x)$ er ein trigonometrisk funksjon for $x < 0$, og er derfor deriverbar for $x < 0$. For at funksjonen skal vere deriverbar for $x = 0$, må den vere kontinuerlig. Det betyr at følgjande må gjelde:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0). \tag{1}$$

For $x \geq 0$ er funksjonen samansatt av eit polynom og ein eksponential funkjson, altså kontinuerlig og vi har

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b.$$

I tillegg ser vi at

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\cos x + 1) = a + 1.$$

For at identiteten (1) skal gjelde må vi ha

$$b = a + 1.$$

Dermed må funksjonen vere på forma

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + 1 & \text{viss } x < 0 \\ (a+1)e^{2x} + ax & \text{viss } x \geq 0 \end{cases}$$

Siden funksjonen er samansatt av deriverbare funksjonar for alle x betyr det at de høgre og venstresidige deriverte eksisterer. For $x \geq 1$ kan vi nytte derivasjonsregler direkte for å finne høgresidig derivert.

$$f'_+(0) = \frac{d}{dx}\Big((a+1)e^{2x} + ax\Big)_{x=0} = \Big(2(a+1)e^{2x} + a\Big)_{x=0} = 2(a+1) + a = 3a + 2$$

For $x < 0$ nyttar vi definisjonen:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cos(0+h) + 1 - (a+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cos h - a}{h} = a \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos h - 1}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dersom $f'(0)$ skal eksistere, må vi ha $f'_-(1) = f'_+(1)$, dvs $0 = 3a + 2$, som gir $a = -2/3$ og $b = a + 1 = 1/3$.

Valget av konstanter som gir at funksjonen er deriverbar er derfor $\underline{a = -2/3}$ og $\underline{b = 1/3}$.

OPPGAVE 3

La $h(x) = (8 + 3x)^{1/3}$.

a) *Vis at Taylorpolynomet $P_3(x)$ av grad 3 til $h(x)$ om punktet $x = 0$ er gitt ved*

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{768}x^3$$

Bruk $P_3(x)$ til å rekne ut ein tilnærma verdi for $11^{1/3}$.

Vi reknar først ut dei deriverte og evaluerer dei i $x = 0$

$$\begin{aligned} h(x) &= (8+3x)^{1/3} & h(0) &= 2 \\ h'(x) &= (8+3x)^{-2/3} & h'(0) &= \frac{1}{4} \\ h''(x) &= -2(8+3x)^{-5/3} & h''(0) &= -\frac{1}{16} \\ h'''(x) &= 10(8+3x)^{-8/3} & h'''(0) &= \frac{5}{128} \end{aligned}$$

Taylorpolynomet vert

$$\begin{aligned} P_3(x) &= h(0) + h'(0)(x-0) + \frac{h''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{h'''(0)}{3!}(x-0)^3 \\ &= 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16\cdot 2}x^2 + \frac{5}{128\cdot 3!}x^3 \\ &= 2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{768}x^3 \end{aligned}$$

For å finne ein tilnærma verdi til $11^{1/3}$ sett vi $x = 1$ i $P_3(x)$

$$11^{1/13} = h(1) \approx P_3(1) = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} + \frac{5}{768} \approx \underline{2.22526} \tag{2}$$

b) *Finn restleddet $E_3(x)$ til Taylorpolynomet i a), og bruk dette til å gi eit minst mogleg intervall som inneheld $11^{1/3}$.*

Restleddet kan skrivst på forma

$$E_3(x) = \frac{h^{(4)}(c)}{4!}x^4 \quad \Rightarrow E_3(1) = \frac{-80}{24(8+3c)^{11/3}}$$

der $0 < c < x$. For å finne eit intervall som garantert inneheld $11^{1/3}$ må vi finne eit interval for feilen. Sidan restleddet er negativt, vil restleddet ligge mellom

$$\begin{gathered}-0.0016 = -\frac{80}{24 \cdot 8^{11/3}} < E_3(1) < 0 \\ \Downarrow \\ P_3(1) - 0.00163 < P_3(1) + E_3(1) < P_3(1)\end{gathered}$$

Sidan $11^{1/3} = h(1) = P_3(1) + E_3(1)$ vil det minste intervallet vi kan finne ved bruk av restleddet vere

$$\underline{2.2236 < 11^{1/3} < 2.2253.}$$

c) *Finn ein approksimasjon til $11^{1/3}$ ved å nytta tre iterasjoner med Newtons metode med startpunkt $x_0 = 3/2$ på ein passande funksjon.*

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

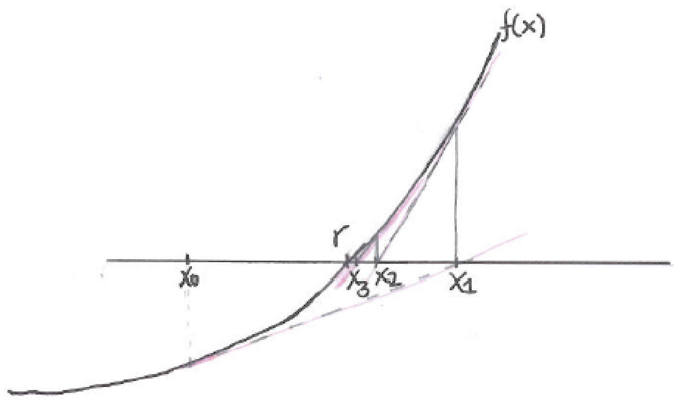
Gitt

$$x = 11^{1/3}, \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x^3 - 11, \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2.$$

$$\begin{aligned}x_0 &= 1.5 \\ x_1 &= 1.5 - \frac{f(1.5)}{f'(1.5)} = 1.5 + \frac{1.5^3 - 11}{3 \cdot 1.5^2} = 2.6296, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2.2833, \\ x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = \underline{2.2255}\end{aligned}$$

Grunngje om verdien er for stor eller for liten i forhold til den nøyaktige verdien utan å bruke kalkulator.

Alternativ 1: $f''(x) = 6x > 0$ for alle $x > 0$, altså er $f(x)$ konkav opp slik at alle tangentane til grafen vil ligge under grafen. I tillegg er f(x) voksande sidan $f'(x) > 0$ for $x > 0$, det betyr at alle tangentar vil snitte x-aksen til høgre for punktet der grafen til $f(x)$ snitter x-aksen som er nullpunktet r ($f(r) = 0$). Spesielt vil tangenten i punktet $x_0 = 3/2$ snitte x-aksen, x_1, til høgre for nullpunktet r, vidare vil tangenten til $f(x)$ i x_1 snitte x-aksen i punktet x_2 til høgre for r, igjen vil tengenten til $f(x)$ i x_2 snitte x-aksen i punktet x_3 til høgre for r. Altså er $x_3 > r$ og verdien er litt for stor. Her er ein teikning som illustrerer situasjonen:



Merk: Viss ein definerer funksjonen $f(x) = 11 - x^3$ for å løyse oppgåva, argumenterer ein på tilsvarande måte, men bruker at funksjonen er avtagande og konkav ned. Svaret vert de same.

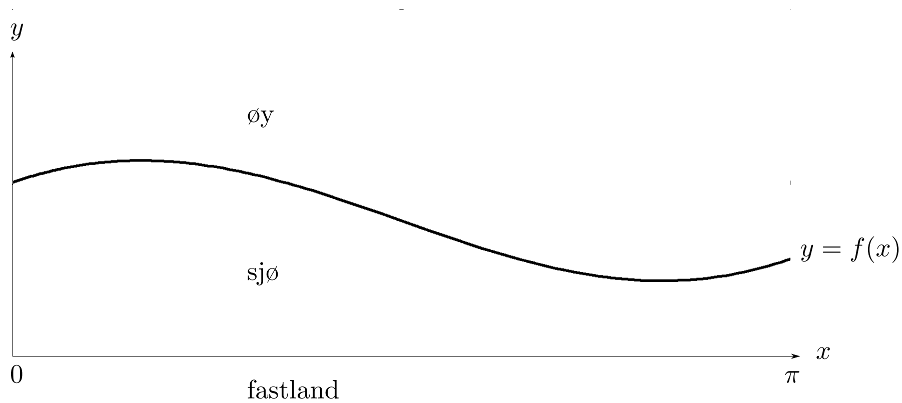
Alternativ 2: I oppgåve b) fann vi eit intervall som garantert inneheld $11^{1/3}$. Den tilnærma verdian me finn ved å bruke tre steg med newton, $x_3 = 2.2255$ er større enn 2.2253 og ligg utanfor intervallet me fann i b), altså er x_3 for stor.

OPPGÅVE 4

Det skal byggast ei bru frå fastlandet til ei øy utanfor. Strandlina til fastlandet har funksjonen $y = 0$ medan strandlina til øya vi ser på har funksjonen

$$y = f(x) = \frac{1}{4}\cos x + \frac{x}{8},$$

der både x og y er avstandar i km. Vi ser på intervallet $x \in [0\ \pi]$.



På dette intervallet skal det byggast ei bru frå fastlandet og over til øya. Det er billegast å bygge kortast mogleg bru. Modeller frå kva punkt $(x, y) = (x, 0)$ på fastlandet det er minst kostnad med å bygge denne brua.

Startar med å derivere funksjonen $f(x)$ og set til 0 for å finne moglege kandidatar til minimumspunkt, der avstanden til fastlandet er kortast mogleg. Funksjonen har ingen singulære punkt på intervallet.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{8} = 0 \\ x &= \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ og } \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

Vi sjekkar desse punkta, saman med endepunkta for å finna ut kva som er minimum (dette kan også gjerast ved å sjå på forteiknet til den deriverte, men ein må uansett hugse å sjekke for endepunkta).

$$\begin{aligned} f(0) &\simeq 0.25 \\ f(\pi/6) &\simeq 0.28 \\ f(5\pi/6) &\simeq 0.11 \\ f(\pi) &\simeq 0.14 \end{aligned}$$

Vi ser at den kortaste avstanden frå fastlandet til øya er i punktet $(5\pi/6,\ 0)$, der det dermed er minst kostnader med å byggja brua frå.

OPPGAVE 5

Du vil springe deg ein tur, men du er avhenging av musikk for å halde motivasjonen oppe når du spring. Før du legg ut på tur vil du vil du finne ut kor lenge du kan springe før mp3 spelaren din slår seg av. Når spelaren er på vil batterikapasiteten, B, minke med ein rate som er proporsjonal med antal minutt, t, som går. Dette kan modellerst med differensiallikninga

$$\frac{dB}{dt} = aB,$$

der a er proporsjonalitetskonstanten. Når du slår på spelaren er batterikapasiteten på 70%*, etter* 5 *minutt er den på* 60%*. 20 minutt etter at du slår på spelaren startar du å springe. Kor lenge kan du springe før spelaren slår seg av viss den må ha* 5% *batterikapasietet for å kunne spele musikk?*

Differensialligninga

$$\frac{dB}{dt} = aB$$

er ei separabel differensialligning og vi har

$$\begin{aligned} \int \frac{dB}{B} &= \int a dt \\ \ln B &= at + C' \\ B &= e^{C'} e^{at} = Ce^{at}. \end{aligned}$$

For å bestemme de ukjente konstantene a og C benytter vi informasjonen om batterikapasiteten ved tid 0 og 5, dvs $B(0) = 70$ og $B(5) = 60$. Dette gir

$$\begin{aligned} 70 = Ce^0 \quad &\Rightarrow \quad C = 70 \\ 60 = 70e^{5a} \quad &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{5}\ln\frac{60}{70} \end{aligned}$$

altså er

$$B = 70\exp(\frac{t}{5}\ln\frac{6}{7})$$

Me ynskjer å finne ut kor mage minutt det tar før batterikapasiteten vert 5%, dvs

$$
\begin{aligned}
5 &= 70\exp\left(\frac{t}{5}\ln\frac{6}{7}\right) \\
\ln\frac{5}{70} &= \frac{t}{5}\ln\frac{6}{7} \\
t &= 5\,\frac{\ln 5 - \ln 70}{\ln 6 - \ln 7} = 85.6
\end{aligned}
$$

Det tar altså 85.6 minutt før spelaren slår seg av, du kan då springe i $85.6 - 20 = \underline{65.6 \text{ minutt}}$.

OPPGÅVE 6

a) *Rekn ut det ubestemte integralet*

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{dx}$$

Vel å løysa denne oppgåva vha. delvis integrasjon:

$$
\begin{aligned}
U(x) &= \sin x \qquad & U'(x) &= \cos x \\
V'(x) &= \mathrm{e}^x \qquad & V(x) &= \mathrm{e}^x,
\end{aligned}
$$

dette gir

$$
\begin{aligned}
\int V'U \,\mathrm{dx} &= VU - \int V'U \,\mathrm{dx} \\
\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{dx} &= \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{dx} \\
&= \mathrm{e}^x \sin x - \left(\mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{dx}\right)
\end{aligned}
$$

Gjenkjenner integralet $\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{dx}$ som eit repetert integral, set saman og får

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{dx} = \underline{\frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) + C}$$

b) *Rekn ut det ubestemte integralet*

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 4} \,\mathrm{dx}$$

Ser at polynomet i teljaren har høgare grad enn i nemnaren, startar difor med polynomdivisjon:

$$x^3 + x^2 - 2 \;:\; x^2 - 4 \;=\; x + 1 + \frac{2(2x+1)}{x^2 - 4}$$

Delbrøksoppspaltar det siste leddet:

$$
\begin{aligned}
\frac{2(x+1)}{x^2-4} = \frac{2(x+1)}{(x-2)(x+2)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \\
2(x+1) &= A(x+2) + B(x-2) \\
x^0 : \qquad 2 &= 2A - 2B \\
x^1 : \qquad 4 &= A + B
\end{aligned}
$$

Dette gir $A = \frac{5}{2}$ og $B = \frac{3}{2}$. Set saman og får integralet:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 4}\,\mathrm{dx} &= \int \left(x + 1 + \frac{5}{2(x-2)} + \frac{3}{2(x+2)}\right)\mathrm{dx} \\ &= \underline{\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}\ln(x-2) + \frac{3}{2}\ln(x+2) + C}\end{aligned}$$

c) *Rekn ut integralet*

$$\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{(x+2)^{2/3}}$$

I dette bestemte integralet eksisterar ikkje integranden for den nedre grensa; dvs. at integralet er uekte. Nyttar definisjonen:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{(x+2)^{2/3}} &= \lim_{R\to -2+} \int_{R}^{1} \frac{\mathrm{dx}}{(x+2)^{2/3}} \\ &= \lim_{R\to -2+} \left[3(x+2)^{1/3}\right]_R^1 \\ &= \lim_{R\to -2+} (3(3^{1/3} - (R+2)^{1/3})) = \underline{3\sqrt[3]{3}}\end{aligned}$$

d) *Finn volumet til lekamen som vert danna når området avgrensa av $y = \cos x$ og $y = \sin x$ vert rotert om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \pi/4$.*

Volumet til lekamen

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \pi \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

OPPGÅVE 7

I denne oppgåva skal vi sjå på nasjonale CO_2 utslepp i perioden 1980-2010. Statistisk sentralbyrå og Klima- og forureiningsdirektoratet har ei oversikt over CO_2 utslepp i millionar tonn per år. Tabellen under er eit utdrag av denne oversikta :

År	CO_2-utslepp
1980	31.7 mill. tonn
1985	32.7 mill. tonn
1990	34.8 mill. tonn
1995	37.8 mill. tonn
2000	41.7 mill. tonn
2005	43.3 mill. tonn
2010	42.8 mill. tonn

Bruk dette utdraget saman med Trapesregelen til å estimere totalt CO_2 utslepp i perioden 1980-2010.

Trapesregelen er gitt ved:

$$T_n = \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n\right),$$

i denne oppgåva er $n = 6$ og $h = \frac{2010-1980}{6} = 5$.
Sett inn i trapesregelen for å estimere totalt utslepp i denne perioden:

$$T_6 = \frac{5}{2}\left(31.7 + 2 \cdot 32.7 + 2 \cdot 34.8 + 2 \cdot 37.8 + 2 \cdot 41.7 + 2 \cdot 43.3 + 42.8\right) \simeq 1137.8$$

Totalt nasjonalt CO2 utslepp i perioden 1980-2010 er då estimert til å vera 1138 millionar tonn.

Trine Mykkeltvedt Hilde Kristine Hvidevold