UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I
Mandag 17. desember 2012, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex, 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1-8) og består av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (eksempelvis teller oppgave 5(a) like mye som hele oppgave 8).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

For hvilke reelle tall x gjelder ulikheten $\left|1 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$?

Svar
At $\left|1 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ er det samme som

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} - 1 < \frac{1}{2}.$$

Dette er igjen det samme som at

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{3}{2}.$$

Dette impliserer at x er positiv, så ved å gange alle ledd med x ser vi at dette er det samme som at

$$\frac{x}{2} < 1 < \frac{3x}{2},$$

eller

$$x < 2 \qquad \text{og} \qquad 2 < 3x,$$

som kan leses

$$x < 2 \qquad \text{og} \qquad 2/3 < x.$$

Ulikheten er altså oppfyllt når $2/3 < x < 2$, eller formulert annerledes, når $x \in (2/3, 2)$.

Oppgave 2

La z være det komplekse tallet

$$z = 3\cos(\pi/12) - 3i\sin(\pi/12).$$

Skriv tallene z^2 og z^3 på formen $x + iy$ for reelle tall x og y.

Svar

Vi skriver z på polarform:
$$z = 3(\cos(-\pi/12) + i\sin(-\pi/12)).$$
Da er
$$z^2 = 3 * 3(\cos(-2\pi/12) + i\sin(-2\pi/12)) = 9(\cos(\pi/6) - i\sin(\pi/6)),$$
og
$$z^3 = 3 * 3 * 3(\cos(-3\pi/12) + i\sin(-3\pi/12)) = 27(\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)),$$
Nå kan vi enten slå opp, eller enkelt geometrisk utlede $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$ og at $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Settes dette inn fås
$$z^2 = 9(\sqrt{3}/2 - i/2) = \frac{9\sqrt{3}}{2} + i(-\frac{9}{2})$$
og
$$z^3 = 27(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{27}{\sqrt{2}} + i(-\frac{27}{\sqrt{2}}).$$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi finne en formel for integralet $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$. Til dette skal vi bruke at
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

(a) Bruk integralet ovenfor og substitusjonen $u = \cos x$ til å finne en formel for integralet $G_1(x) = \int \frac{dx}{\sin x}$. Du finner fasit til dette spørsmålet på omslaget av læreboken, så det er viktig, at du beskriver hvordan du kommer frem til resultatet ditt.

(b) Sjekk ved derivasjon at $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x} + C$.

(c) Bruk (b) ovenfor og partiell integrasjon til å vise at integralet $G_3(x) = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$ oppfyller ligningen
$$2G_3(x) = G_1(x) - \frac{\cos x}{\sin^2 x},$$
der $G_1(x)$ er gitt i (a).

Svar

(a) Settes $u = \cos x$, fås $du = -\sin x dx$, så
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= -\int \frac{-\sin x dx}{\sin^2 x} \\
&= -\int \frac{du}{1-u^2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

(b) Dette er rett frem:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(-\cos x)\sin x - (-\cos x)\frac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

(c) Også dette er rett frem:

$$\begin{aligned}
G_3(x) &= \int \frac{dx}{\sin^3 x} \\
&= \int \frac{1}{\sin x} d\left(\frac{-\cos x}{\sin x}\right) \\
&= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{-\cos x}{\sin x} - \int \frac{-\cos x}{\sin x} d\frac{1}{\sin x} \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x} dx \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1}{\sin^3 x} dx + \int \frac{1}{\sin x} dx \\
&= \frac{-\cos x}{\sin^2 x} - G_3(x) + G_1(x),
\end{aligned}$$

som vi skulle vise.

Oppgave 4

I denne oppgaven kan alle spørsmål løses uten å løse de andre spørsmålene i oppgaven.

(a) Bruk ε-δ-definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$$

(Hint: Du kan fritt benytte at for $a > 1$ er $e^{-a} < 1/a$.)

(b) Bruk resultatet fra (a) og l'Hôpitals regel til å vise at

$$\lim_{x\to 0} x^{-1}\, e^{-1/x^2} = 0$$

Bruk igjen l'Hôpitals regel til å vise at dersom n er et heltall med

$$\lim_{x\to 0} x^{-n}\, e^{-1/x^2} = 0$$

da er også

$$\lim_{x\to 0} x^{-n-2}\, e^{-1/x^2} = 0$$

Svar

(a) Her må man vise at for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ finnes det et tall $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x| < \delta \Longrightarrow |e^{-1/x^2}| < \varepsilon.$$

Vi kan for eksempel ta $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Merk at ulikheten $e^{-a} < 1/a$ gjelder også når $0 < a \leq 1$. Når $|x| < \delta$ får vi dermed at

$$\left|e^{-1/x^2}\right| = e^{-1/x^2} < x^2 = |x|^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon.$$

Merk at det også går an å velge δ på andre måter, man kan for eksempel ta $\delta = \min(1, \varepsilon)$ eller

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \varepsilon \geq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{-\ln \varepsilon}}, & \text{hvis } \varepsilon < 1. \end{cases}$$

(b) Først skriver vi $\lim_{x\to 0}\ x^{-1}\ e^{-1/x^2} = 0$ på formen

$$\lim_{x\to 0}\ x^{-1}\ e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{e^{1/x^2}}.$$

Siden både telleren og nevneren går mot $+\infty$ når $x \to 0$, kan vi bruke l'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\ x^{-1}\ e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^{-2}}{e^{1/x^2} \cdot (-2) \cdot x^{-3}} \\ = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x\, e^{-1/x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

På lignende vis får vi at

$$\lim_{x\to 0} x^{-n-2}\, e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-n-2}}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-n-2) \cdot x^{-n-3}}{e^{1/x^2} \cdot (-2) \cdot x^{-3}} = \frac{n+2}{2} \lim_{x\to 0} x^{-n}\, e^{-1/x^2} = 0.$$

Oppgave 5

(a) Hvor mange løsninger har ligningen $e^x = x + 2$ på $(-\infty, \infty)$?

(b) Bruk Newtons metode én gang med $x_0 = \ln 2$ til å finne en tilnærmet løsning x_1 til ligningen $e^x = x + 2$ på $[0, \infty)$. Regn ut den eksakte verdien til e^{x_1} og begrunn om x_1 er for stor eller for liten i forhold til den nøyaktige løsningen.

Svar

(a) Løsningenen til ligningen $e^x = x + 2$ er det samme som nullpunktene til funksjonen $f(x) = e^x - x - 2$. Den deriverte $f'(x) = e^x - 1$ oppylder at $f'(x) < 0$ for $x < 0$ og at $f'(x) > 0$ for $x > 0$. Vi kan slutte at $f(x)$ er avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$ og at $f(x)$ er voksende på intervallet $[0, \infty)$. Derfor har $f(x)$ høyst et nullpunkt på hvert av disse intervaller, så totalt har $f(x)$ høyst to nullpunkter. Siden $f(-2) = e^{-2} + 2 - 2 = e^{-2}$ er positiv og $f(0) =$

$e^0 - 0 - 2 = -1$ gir skjæringssetningen at den kontinuerlige funksjonen $f(x)$ har minst et nullpunkt på intervallet $(-2, 0)$. På samme måte, siden $f(0) = -1$ og siden $f(2) = e^2 - 2 - 2 = e^2 - 2^2 > 0$ (fordi $e > 2$) har $f(x)$ minst et nullpunkt på intervallet $(0, 2)$. Vi kan konkludere at $f(x)$ har nøyaktig to nullpunkter på $(-\infty, \infty)$, og at ligningen $e^x = x + 2$ har nøyaktig to løsninger på $(-\infty, \infty)$.

(b) Vi bruker Newtons metode til å finne et tilnærmet nullpunkt for funksjonen $f(x) = e^x - x - 2$. Begynner vi med x_0 er et tilnærmet nullpunkt gitt ved formelen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Vi setter $x_0 = \ln 2$ og bruker at $f'(x) = e^x - 1$, så

$$x_1 = \ln 2 - \frac{e^{\ln 2} - \ln 2 - 2}{e^{\ln 2} - 1} = \ln 2 - \frac{2 - \ln 2 - 2}{2 - 1} = \ln 2 + \ln 2 = \ln(2 \cdot 2) = \ln 4.$$

Da er altså $e^{x_1} = 4$.

Siden $f'(x)$ er positiv på $[0, \infty)$ og $f''(x) = e^x > 0$ er $f(x)$ en funksjon som er voksende og krummer oppover på intervallet $[0, \infty)$. Herav kan vi slutte at tangentene til grafen for $f(x)$ på $[0, \infty)$ ligger både under og til høyre for grafen. Spesielt snitter tangenten gjennom $(x_0, f(x_0))$ x-aksen til høyre for hvor grafen til $f(x)$ snitter x-aksen. Det vil si at x_1 er større enn den nøyaktige løsningen til $e^x = x + 2$ på $[0, \infty)$.

Oppgave 6

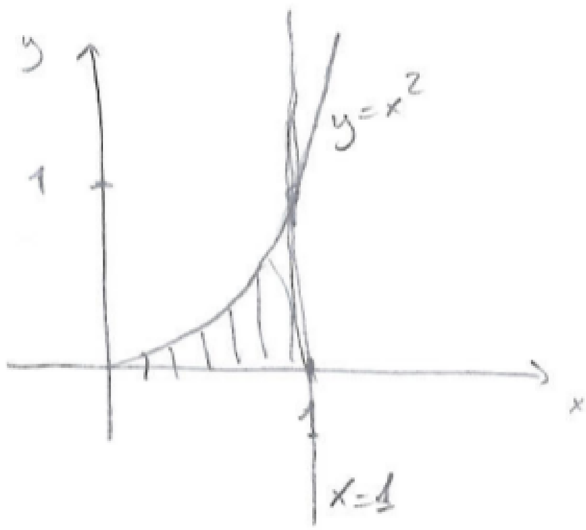
(a) Skisser området avgrenset av x-aksen, linjen $x = 1$ og grafen til funksjonen $f(x) = x^2$. Beregn arealet til dette området.

(b) Skisser området avgrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^2$ og funksjonen $g(x) = \sqrt{2 - x^2}$. Beregn arealet til dette området.

Svar

(a) Arealet til området er

$$A = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ kvadratenheter}$$



(b) Arealet til området er

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx.$$

Med substitusjonen $x = \sqrt{2}\sin u$ fås

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = \int \sqrt{2-2\sin^2 u}d\sqrt{2}\sin u = \int 2\cos^2 u du = \int (\cos 2u + 1) du = \frac{\sin 2u}{2} + u + C,$$

så

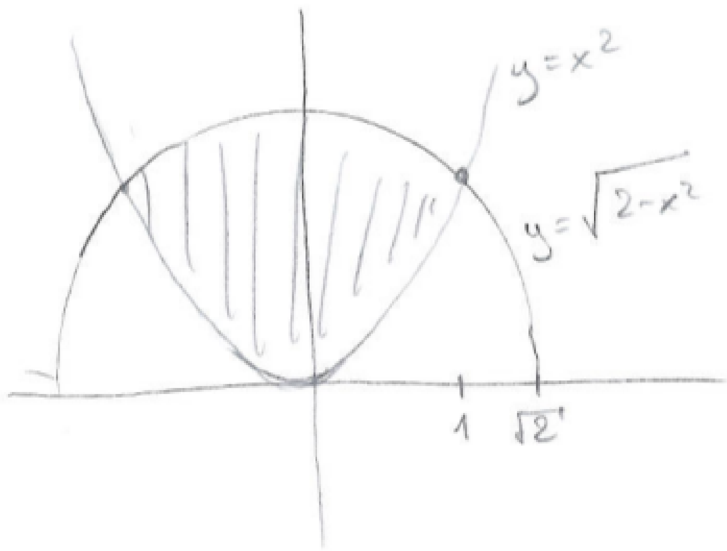
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}dx = \left[\frac{\sin 2u}{2} + u\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - (-\frac{1}{2}) - \frac{-\pi}{4} = 1 + \pi/2.$$

Det andre integralet blir

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}(1-(-1)) = \frac{2}{3}.$$

Subtraheres disse to tallene fås

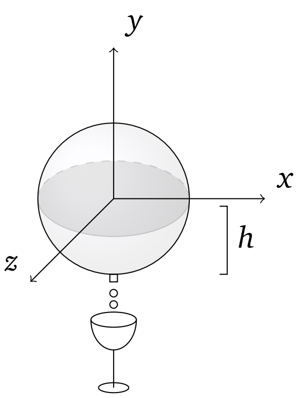
$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = 1 + \pi/2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \pi/2 \text{ kvadratenheter.}$$



Oppgave 7

Du er på eksamensfest og deler ut velkomstdrikk til medstudentene dine. Drikken er i en bolle med et lite hull i bunnen som kan lukkes med en ventil. Istedenfor å åpne og lukke ventilen hele tida, øyner du muligheten til å more deg og dine medstudenter ved å la ventilen stå åpen og forutsi når bollen er tom. I denne oppgaven skal vi se på hvordan du gjør det. (Oppgaven er laget slik at du kan svare på spørsmålene uavhengig av hverandre.)

(a) Bollen er kuleformet, så den er symmetrisk om en tenkt y-akse gjennom sentrum av bollen som også går gjennom hullet i bunnen av bollen. Ethvert vertikalt tverrsnitt gjennom denne aksen har form som sirkelen $x^2 + y^2 = 625\text{cm}^2$ med radius $r = 25\text{cm}$, se figuren.



Vis at volumet V av velkomstdrikken i bollen, som funksjon av høyden h til overflaten av velkomstdrikken i forhold til bunnen av bollen, er gitt ved

$$V(h) = \pi(25h^2 - \frac{h^3}{3})$$

(NB: Siden svaret er oppgitt, er det spesielt viktig at du viser tydelig hvordan du kommer frem til svaret.)

(b) En konsekvens av Torricellis lov fra fysikken sier:

Når en væske strømmer ut av et lite hull i et kar, er volumendringen per tidsenhet av væsken i karet proporsjonalt med kvadratroten av væskehøyden over hullet.

Bruk svaret fra (a) og Torricellis lov til å vise at høyden h til overflaten av velkomstdrikken i forhold til bunnen av bollen tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{dh}{dt} = -a\frac{\sqrt{h}}{50h - h^2}$$

for en positiv konstant a.

(c) Vi setter $t = 0$ til å være tidspunktet du åpner ventilen i bunnen av bollen. La $h_0 = h(0)$ være høyden til overflaten av velkomstdrikken i forhold til bunnen av bollen ved tiden $t = 0$. Vis at

$$\sqrt{h}\,(100h - \frac{6}{5}h^2) = -3at + \sqrt{h_0}\,(100h_0 - \frac{6}{5}h_0^2)$$

for den positive konstanten a fra (b).

(d) Når $t = 6$ minutter har gått, regner du ut at

$$\sqrt{h}\,(100h - \frac{6}{5}h^2) = \frac{1}{7}\sqrt{h_0}\,(100h_0 - \frac{6}{5}h_0^2).$$

Ved hvilket tidspunkt er bollen tom?

Svar

(a) La $r = 25$ betegne radius til bollen. Legges bollen ned med origo i sentrum og hullet til venstre fås

$$V = \int_{-r}^{-r+h} A(x)dx = \pi\int_{-r}^{-r+h}(r^2 - x^2)dx = \pi[r^2x - \frac{1}{3}x^3]_{-r}^{-r+h}.$$

Siden

$$\begin{aligned}3[r^2x - \frac{1}{3}x^3]_{-r}^{-r+h} &= 3r^2(h-r) - (h-r)^3 + 3r^3 - r^3 \\ &= 3r^2h - 3r^3 - h^3 + 3rh^2 - 3r^2h + r^3 + 3r^3 - r^3 = 3rh^2 - h^3\end{aligned}$$

er

$$V = \frac{\pi}{3}(3rh^2 - h^3) = \pi(25h^2 - \frac{h^3}{3})$$

(b) Torricellis lov gir at $\frac{dV}{dt} = -b\sqrt{h}$ for en positiv konstant b. Kjerneregelen gir

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \pi(50h - h^2)\cdot\frac{dh}{dt},$$

så

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-b\sqrt{h}}{\pi(50h - h^2)} = -a\frac{\sqrt{h}}{50h - h^2}$$

for den positive konstanten $a = b/\pi$.

(c) Integreres ligningen

$$\frac{50h-h^2}{\sqrt{h}}\cdot\frac{dh}{dt}=-a$$

med hensyn på t fås

$$\int_0^t \frac{50h-h^2}{\sqrt{h}}\cdot\frac{dh}{dt}dt=\int_0^t -a\,dt=-at.$$

Vi kan beregne venstresiden ved å bruke at:

$$\int \frac{50h-h^2}{\sqrt{h}}\cdot\frac{dh}{dt}dt=\int \frac{50h-h^2}{\sqrt{h}}dh=\frac{100}{3}h^{3/2}-\frac{2}{5}h^{5/2}+C=\frac{\sqrt{h}}{3}(100h-\frac{6}{5}h^2)+C,$$

så

$$-at=\int_0^t \frac{50h-h^2}{\sqrt{h}}\cdot\frac{dh}{dt}dt=\frac{\sqrt{h}}{3}(100h-\frac{6}{5}h^2)-\frac{\sqrt{h_0}}{3}(100h_0-\frac{6}{5}h_0^2),$$

og

$$\sqrt{h}\,(100\,h-\frac{6}{5}h^2)=-3at+\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2)$$

(d) Til tiden $t=6$ er

$$\sqrt{h}\,(100\,h-\frac{6}{5}h^2)=-3a\cdot 6+\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2)=\frac{1}{7}\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2).$$

Det gir

$$0=6(-3a+\frac{1}{7}\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2))$$

så

$$3a=\frac{1}{7}\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2).$$

Vi har at

$$\sqrt{h}\,(100\,h-\frac{6}{5}h^2)=0$$

når

$$3at=\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2),$$

det vil si når

$$\frac{1}{7}\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2)t=\sqrt{h_0}\,(100\,h_0-\frac{6}{5}h_0^2).$$

Dette er oppfylt når $t=7$, så bollen er tom etter syv minutter.

Oppgave 8

Grafen til den deriverbare funksjonen $f(x)$ skjærer linjen $y=ax+b$ tre steder. Vis at det finnes minst to punkter x der $f'(x)=a$.

Svar

La $g(x)=f(x)-ax-b$. Da finnes tall $x_1<x_2<x_3$ slik at $g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$. Rolles teorem gir eksistensen av et tall x i intervallet (x_1,x_2) med $g'(x)=0$, og av et tall x i (x_2,x_3)

med $g'(x) = 0$. Disse to tallene oppfylder at $0 = g'(x) = f'(x) - a$, så $f'(x) = a$ i disse to tall. Vi har vist at det finnes minst to punkter x der $f'(x) = a$.