BOKMÅL

UNIVERSITETET I BERGEN
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
onsdag 16.mai 2012 kl. 09:00-14:00

Tilllatte hjelpemiddel: "R. A. Adams, Calculus - A complete course" og kalkulator uten grafisk display, som ikke kan programmeres.

Antall deloppgaver: 17

OPPGAVE 1

a) La

$$z_1 = -3 - 3\sqrt{3}i, \qquad z_2 = 4 + i,$$

finn (skriv på formen $a + bi$): i) $z_1 z_2$ og ii) $\dfrac{z_2}{\overline{z_1}}$.

b) Finn alle løsninger av ligningen

$$w^4 + 2w^2 + 4 = 0.$$

Skriv løsningene på formen $a + bi$ og merk av i det komplekse planet.

OPPGAVE 2

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{\cos x}$$

b) Anta at $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar overalt. Anta videre at f(x) har to røtter (dvs det eksisterer to tall x_1 og x_2 slik at $f(x_1) = 0$ og $f(x_2) = 0$). Vis at $f'(x)$ må ha minst en rot.

OPPGAVE 3

a) Vis at ligningen $\ln x = \sin x$ har en løsning på intervallet $[\pi/2, \pi]$.

b) Bruk Newtons metode til å finne løsningen på ligningen $\ln x = \sin x$ på intervallet $[\pi/2, \pi]$, med to desimalers nøyaktighet.

OPPGAVE 4

Finn 1. ordens Taylorpolynom med restledd til funksjonen

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

om punktet $x = \pi$. Finn en tilnærmet verdi til $f(3)$. Er den tilnærmed verdien for stor eller for liten (grunngi uten å bruke kalkulator)?

OPPGAVE 5

La $y = f(x)$ der

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2-x}{x+2}\right), & -1 \leq x < 0 \\ x - x^3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Bruk definisjonen av kontinuitet og den deriverte i et punkt og bestem om $f(x)$ er kontinuerlig og/eller deriverbar i punktet $x = 0$.

b) Er $x = 0$ er et vendepunkt? Begrunn svaret.

c) Vis at $f(x)$ for $x \in [-1,\ 0)$ har en invers funksjon $g(x) = f^{-1}(x)$. Finn denne inversfunksjonen.

OPPGAVE 6

a) Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \sin(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

b) Regn ut det ubestemte integralet

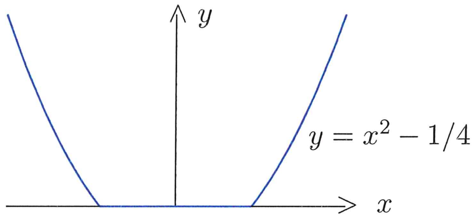
$$\int \left(\tan^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\,\mathrm{d}x.$$

c) Finn arealet mellom $y = \mathrm{e}^{-x}$ og x-aksen, til høyre for $x = 0$.

OPPGAVE 7 **NB: Du kan løse oppgave b) uten å ha løst a), og c) uten å ha løst b).**

a) Innsiden av et tenkt boblebad er symmetrisk om en tenkt y-akse, og eithvert vertikalt tverrsnitt gjennom denne aksen er avgrenset av linjen $y = 0$ og likningen $y = x^2 - \frac{1}{4}$ (se figur). Vis at innervolumet til boblebadet som funksjon av høyden h (i meter) til vannet over bunnen er gitt ved

$$V(h) = \frac{\pi}{2}(h^2 + \frac{h}{2})$$



b) Volumet av vannet i boblebadet øker med $0.01\text{m}^3/\text{min}$, når det blir fyllt med vann. Anta at volumet av vannet i boblebadet er en lineær funksjon av tiden t og at det er tomt når vannet blir slått på. Finn vannhøyden, $h(t)$, i boblebadet som funksjon av tidaen t.
Det tar 25 minutter å fylle badekaret, hvor høy er vannstanden når badekaret er fullt?

c) Anta at vannet i boblebadet etter at strømmen er slått av blir avkjølt etter Newtons avkjølingslov:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - a),$$

der y er temperaturen til vannet, a temperaturen til omgivelsene og k er en konstant. Når strømmen blir slått av kl 2200 er vanntemperaturen 40^oC (la dette være ved tid $t = 0$). Løs differensiallikningen, dvs finn $y(t)$ gitt ved t, a og k.

d) To timer etter at strømmen er slått av har temperaturen i vannet sunket med 5^oC. Anta at temperaturen ute holder seg konstant på 10^oC, hva er da temperaturen i vannet kl 0700 neste morgen?

Trine Mykkeltvedt   Hilde Kristine Hvidevold   Inga Berre