NYNORSK

LØYSINGSFORSLAG
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
onsdag 16. mai 2012 kl. 09:00-14:00

OPPGAVE 1

a) *La*

$$z_1 = -3 - 3\sqrt{3}i, \qquad z_2 = 4 + i,$$

finn (skriv på forma $a + bi$): *i)* $z_1 z_2$ *og* *ii)* $\frac{z_2}{\overline{z_1}}$.

Svar:
i)

$$z_1 z_2 = (-3 - 3\sqrt{3}i)(4 + i) = -12 - 3i - 12\sqrt{3} - 3\sqrt{3}i^2 = \underline{-3(4 - \sqrt{3}) - i3(1 + 4\sqrt{3})}.$$

$$\frac{z_2}{\overline{z_1}} = \frac{(4 + i)}{(-3 + 3\sqrt{3}i)} \frac{(-3 - 3\sqrt{3}i)}{(-3 - 3\sqrt{3}i)} = \frac{-3(4 + \sqrt{3}) - i3(1 + 4\sqrt{3})}{9 + 9\sqrt{3}i - 9\sqrt{3}i - 27i^2} = \underline{-\frac{(4 - \sqrt{3})}{12} - i\frac{1 + 4\sqrt{3}}{12}}.$$

b) *Finn alle løysingar av likninga*

$$w^4 + 2w^2 + 4 = 0,$$

og skriv løysingane på forma $a + bi$.

Svar:
Let $u = w^2$, noko som gir oss likninga:

$$u^2 + 2u + 4 = 0.$$

Løyser for u:

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm i\sqrt{3},$$

har dermed

$$u_1 = -1 + i\sqrt{3}$$
$$u_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$

Skal no løyse for w, og skriv difor u_1 og u_2 på polarform:

$$\text{Modulus } u_1 : \quad |u_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{Argument} u_1 : \quad arg(u_1) = \pi - \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Polarform } u_1 : \quad u_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$\text{Modulus } u_2 : \quad |u_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\text{Argument} u_2 : \quad arg(u_2) = \pi + \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

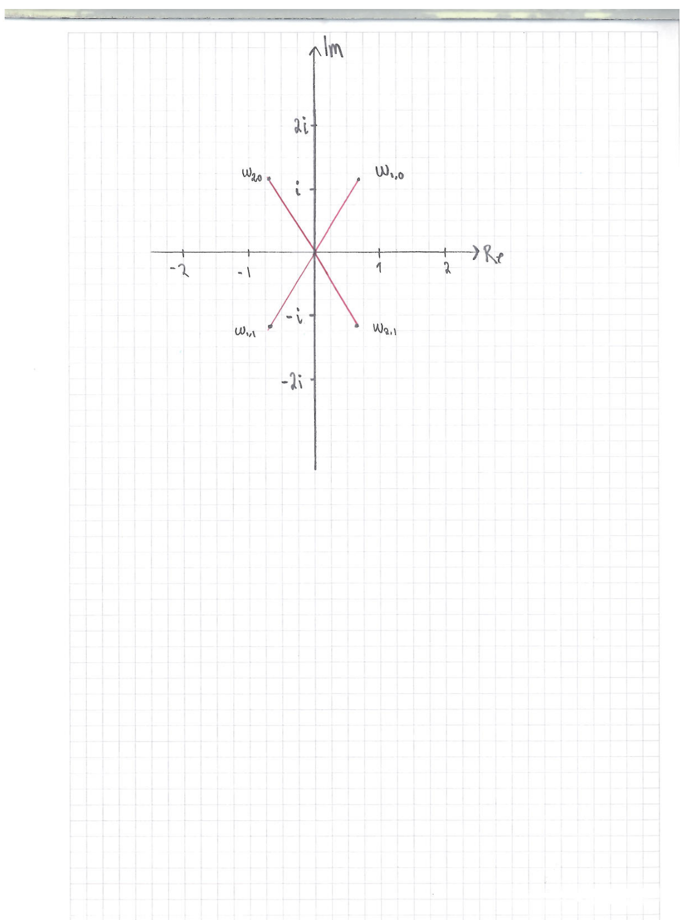
$$\text{Polarform } u_2 : \quad u_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

Sidan $w = \sqrt{u}$, finn vi no kvadratrøttene til u_1 og u_2:

$$
\begin{aligned}
& w_{1,k} = u_1^{1/2} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)^{1/2} \\
k = 0: \quad & w_{1,0} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{1/2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
k = 1: \quad & w_{1,1} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2^{1/2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& w_{2,k} = u_2^{1/2} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\right)^{1/2} \\
k = 0: \quad & w_{2,0} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2^{1/2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
k = 1: \quad & w_{2,1} = 2^{1/2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2^{1/2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Merker så av løysingane $w_{1,0}$, $w_{1,1}$, $w_{2,0}$ og $w_{2,1}$ i det komplekse planet:



OPPGÅVE 2

a) *Finn grenseverdien*

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{\cos x}$$

Svar

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{\cos x} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{-(x - \frac{\pi}{2})}{\cos x}$$

Dette er et grenseuttrykk på den ubestemte formen [0/0]. Kravene for bruk av l'Hôpitals regel er oppfylt siden $f(x) = \pi/2 - x$ og $g(x) = \cos x$ er deriverbare og $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})} g'(x) \neq 0$.

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|x - \frac{\pi}{2}|}{\cos x} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \frac{-1}{-\sin x} = \frac{1}{\sin(\pi/2)} = \underline{1} \tag{1}$$

b) *Anta at $f(x)$ er kontinuerlig og deriverbar overalt. Anta vidare at f(x) har to røtter (dvs det eksisterer to tal x_1 og x_2 slik at $f(x_1) = 0$ og $f(x_2) = 0$). Vis at $f'(x)$ må ha minst ei rot.*
Svar
La røttene til f(x) vere $x = a$ og $x = b$, sidan f(x) er kontinuerlig og deriverbar må det i følge MVT eksistere ein $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0 - 0}{b - a} = 0$$

Altså viser mellomverditeoremet/sekantsetningen at det ekisterer minst eit tal c slik at $f'(c) = 0$, dvs at c er ei rot til $f'(x)$.

OPPGAVE 3

a) *Vis at likninga* $\ln x = \sin x$ *har ei løysing på intervallet* $[\pi/2, \pi]$.
Svar

La $f(x) = \sin x - \ln x$. Vil vise at $f(x) = 0$ for ein x mellom $\pi/2$ og π.

$$f(\pi/2) = 1 - \ln(\pi/2) > 0$$
$$f(\pi) = 0 - \ln(\pi) < 0$$

Sidan både sinus og den logartimiske funskjonen er kontinuerlig på det oppgitte intervallet har me frå middelverditeoremet/skjæringssetningen at det eksisterer eit tal $c \in (\pi/2, \pi)$ slik at $f(c) = 0$.

b) *Bruke Newtons metode for å finne nullpunktet til likninga $f(x) = \ln x - \sin x$ på intervallet $[\pi/2, \pi]$, med to desimalars nøyaktighet.*
Svar
Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f(x) = \ln x - \sin x$ og $f'(x) = \frac{1}{x} - \cos x$. Vel startpunkt $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{\ln(2) - \sin(2)}{0.5 - \cos(2)}$$
$$x_1 = 2.2359$$
$$x_2 = 2.2192$$
$$x_3 = \underline{2.2191}$$

OPPGÅVE 4

Finn 1. ordens Taylorpolynom med restledd til funksjonen

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

om punktet $x = \pi$. Estimer $f(3)$, er den tilnærma verdien for stor eller for liten (begrunn utan å bruke kalkulator).
Svar

$$f(\pi) = 1$$
$$f'(x) = \cos x + \sin x;\ f'(\pi) = -1$$
$$f''(x) = -\sin x + \cos x$$

1. ordens taylorpolynomet, $P_1(x)$ til $f(x)$ med restledd $E_1(x)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= P_1(x) + E_1(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{1}{2} f''(s)(x - \pi)^2 \\ &= 1 - (x - \pi) + \frac{\cos s - \sin s}{2}(x - \pi)^2 \text{ der } s \in [3, \pi] \end{aligned}$$

Ein tilnærma verdi til $f(3)$ er

$$f(3) \approx P_1(3) = 1 + \pi - 3 = \underline{1.14159265}$$

Restleddet $E_1(3) = \frac{\cos s - \sin s}{2}(3 - \pi)^2$. Når $s \in [3, \pi]$ er $\cos s$ negativ og $\sin s$ positiv altså vil $\cos s - \sin s$ vere negativ. Sidan faktisk verdi er lik tilnærma verdi pluss feil ($f(3) = P_1(3) + E_1(3)$), og feilen er negativ vil den tilnærma verdiaen vere for stor.

OPPGAVE 5

La $y = f(x)$ der

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{2 - x}{x + 2}\right), & -1 \le x < 0 \\ x - x^3, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) *Bruk definisjonen av kontinuitet og den deriverte i eit punkt og avgjer om $f(x)$ er kontinuerlig og/eller deriverbar i punktet $x = 0$.*
Svar:
$f(x)$ er kontinuerlig i punktet $x = 0$ sidan

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0-} f(x) &= \ln\left(\tfrac{2}{2}\right) = 0, \\ \lim_{x \to 0+} f(x) &= 0 - 0^3 = 0 \text{ og} \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

$f(x)$ er ikkje deriverbar i punktet $x=0$ sidan

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-}\frac{\ln\left(\frac{2-h}{h+2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0-}\frac{\frac{4}{h^2-4}}{1} = -1 \text{ ved L'Hôpitals regel, medan}\\
\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+}\frac{h-h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0+}\frac{1-h^2}{1} = 1.
\end{aligned}$$

b) Er om $x=0$ er eit vendepunkt? Grunngi svaret.
Svar:
Definisjon av Vendepunkt (jamfør Adams: Calculus - A Complete Course(s.240))
Punktet $(x_0, f(x_0)$ er eit vendepunkt til kurva $y=f(x)$ viss følgjande to føresetnader er oppfylt:
a) grafen til $y=f(x)$ har ei tangentlinje i $x=x_0$
b) $f''(x)$ har ulikt forteikn på kvar si side av x_0

Vi fann i a) at $f(x)$ ikkje er deriverbar i $x=0$ og at $f(x)$ ikkje har ei tangentlinje i $x=0$. Føresetnad a) i definisjonen for vendepunkt er ikkje oppfylt altså er $x=0$ ikkje eit vendepunkt.

c) *Vis at $f(x)$ for $x\in[-1,\ 0)$ har ein invers funksjon $g(x)=f^{-1}(x)$. Finn denne inversfunksjonen.*
Svar:
$f(x)$ er kontinuerlig og $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}<0$ for $-1\le x<0$, så den har difor ein invers på dette intervallet.

$$\begin{aligned}
x &= \ln\left(\frac{2-y}{y+2}\right)\\
e^x &= \frac{2-y}{y+2}\\
(y+2)e^x &= 2-y\\
y(e^x+1) &= 2-2e^x\\
y &= \frac{2-2e^x}{e^x+1}\\
f^{-1}(x) &= \frac{2-2e^x}{e^x+1}.
\end{aligned}$$

OPPGÅVE 6

a) *Rekn ut det ubestemte integralet*

$$\int \sin(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x.$$

Svar:
Nyttar identiteten $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ og substituerar:
$u=\cos^2(x)\ \rightarrow\ \mathrm{d}u=-2\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x$. Dette gir:

$$\int \sin(2x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\ \mathrm{d}x = \int 2\sin(x)\cos(x)\sqrt{1+u}\ \frac{\mathrm{d}u}{-2\cos(x)\sin(x)}$$
$$= -\int\sqrt{1+u}\ \mathrm{d}u = -\frac{2}{3}(1+u)^{3/2}+C = \underline{-\frac{2}{3}(1+\cos^2(x))^{3/2}+C}$$

b) *Rekn ut det ubestemte integralet*

$$\int\left(\tan^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\ \mathrm{d}x.$$

Svar:
Nyttar delvis integrasjon : $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$,

$$u(x) = \tan^{-1}(x) \qquad \Rightarrow \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v(x) = \frac{1}{x^2},$$

dermed:

$$\int \left(\tan^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x = \tan^{-1}(x)\cdot\frac{1}{x^2} - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Integralet $I = \int \frac{1}{(1+x^2)x^2}\,\mathrm{d}x$ finn vi ved å nytte delbrøksoppspalting:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)x^2} &= \frac{A}{x^2} + \frac{B}{1+x^2}\\ 1 &= A(1+x^2) + Bx^2\\ x^0:\ 1 &= A\\ x^2:\ 0 &= A + B \to \quad B = -1\end{aligned}$$

$$I = \int \frac{1}{(1+x^2)x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \tan^{-1}(x)$$

Set saman:

$$\int \left(\tan^{-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} - I = \frac{\tan^{-1}(x)}{x^2} + \frac{1}{x} + \tan^{-1}(x) + C = \underline{\frac{\tan^{-1}(x)(1+x^2)+x}{x^2} + C.}$$

c) *Finn arealet mellom $y = \mathrm{e}^{-x}$ og x-aksen, til høgre for $x = 0$.*
Svar:
Å finne dette arealet tilsvarar å løyse integralet:

$$A = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-R} + \mathrm{e}^0\right) = 0 + 1 = \underline{1}.$$

OPPGÅVE 7 **NB: Du kan løyse oppgåve b) utan å ha løyst a), og c) utan å ha løyst b).**

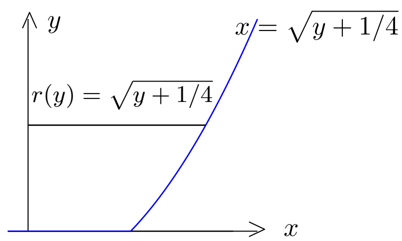
a) *Innsida av eit tenkt boblebad er symmetrisk om ein tenkt y-akse, og eitkvart vertikalt tverrsnitt gjennom denne aksen er avgrensa av linja $y = 0$ og likninga $y = x^2 - \frac{1}{4}$ (sjå figur). Vis at innervolumet til boblebadet som funksjon av høgda h (i meter) til vatnet over botn er gitt ved*

$$V(h) = \frac{\pi}{2}(h^2 + \frac{h}{2})$$

Svar
Alternativ 1
Bruker skivemetoden og integrerer med omsyn på y.

1. Teikner, merker av ei linje som står vinkelrett på rotasjoneaksen og finn likninga for tversnittet $r(y) = \sqrt{y + 1/4}$
2. Finn arealet av sirkelen som vert danna ved å rotere tverrsnittet om x-aksen:

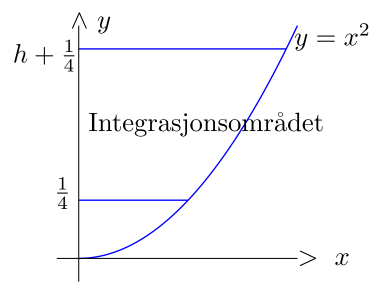
$$A(y) = \pi r(y)^2 = \pi(y + \frac{1}{4})$$



3. Integrasjonsgrenser: $y = 0$ og $y = h$
4. Finn volumet ved å integrere:

$$V = \int_0^h A(y)dy = \pi \int_0^h y + \frac{1}{4} dy = \underline{\frac{\pi}{2}\Big(h^2 + \frac{h}{2}\Big)}.$$

Alternativ 2
Bruker sylinderskal metoden og integrerer med hensyn på x. Forskyv området $+1/4$ vertikalt slik at volumet me vil finne er området under $y = h + 1/4$ og over $y = x^2$ der $x \in [0, \sqrt{h + 1/4}]$ minus området under $y = 1/4$ over $y = x^2$ der $x \in [0, 1/2]$. Sjå figur:



$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{h+1/4}} (h + 1/4 - x^2)x dx - 2\pi \int_0^{1/2} (1/4 - x^2)x dx \\
&= 2\pi \Big[\frac{1}{2}(h + \frac{1}{4})x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{\sqrt{h+1/4}} - 2\pi \Big[\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^{1/2} \\
&= 2\pi \Big(\frac{1}{2}(h + \frac{1}{4})(h + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4}(h + \frac{1}{4})^2) - \frac{1}{4}(\frac{1}{8} - \frac{1}{16})\Big) \\
&= \frac{\pi}{2}\Big(h^2 + \frac{h}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\Big) = \underline{\frac{\pi}{2}(h^2 + \frac{h}{2})}
\end{aligned}$$

b) *Volumet av vatnet i boblebadet aukar med 0.01m^3/min, når det vert fylt med vatn. Anta at volumet av vatnet i boblebadet er ein lineær funksjon av tida t og at det er tomt når vatnet vert slått på. Finn vatnhøgda, h(t), i boblebadet som funksjon av tida t.*
Det tar 25 minutt å fylle badekaret, kor høg er vannstanden når badekaret er fult?

Svar

At volumet av badekaret er ein lineær funksjon av tida betyr at $V(t) = at + b$ me har oppgitt at $dV/dt = 0.01$:

$$\frac{dV}{dt} = a \qquad \Rightarrow \qquad a = 0.01$$

Karet er tomt nå springen vert opna, dvs $V(t=0)=0$, altså er $b=0$, Og $V=0.01t$. Sidan både h og V er positive, er V eintydig og me finn $h(V)$

$$V = \frac{\pi}{2}(h^2 + \frac{h}{2}) \;\Rightarrow h^2 + \frac{1}{2}h - \frac{2V}{\pi} = 0$$

$$h = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + \frac{8V}{\pi}}}{2} = \frac{0.5 \pm \sqrt{0.25 + \frac{0.08t}{\pi}}}{2},$$

Her har me brukt at $V=0.01t$. Sidan $h>0$ så er

$$\underline{h(t) = \frac{-0.5 + \sqrt{0.25 + \frac{0.08t}{\pi}}}{2}}$$

Det tar 25 min å fylle karet

$$h(25) = \frac{-0.5 + \sqrt{0.25 + \frac{0.08\cdot 25}{\pi}}}{2} = \underline{0.2208}$$

Dvs at vatnhøgda i karet er 22 cm.

c) *Anta at vatnet i boblebadet etter at strømmen er slått av vert avkjølt etter Newtons avkjølingslov:*

$$\frac{dy}{dt} = k(y-a),$$

der y er temperaturen til vatnet, a temperaturen til omgivnaden og k er ein konstant. Når strømmen vert slått av kl 2200 er vatntemperaturen $40^o C$ (la dette vere ved tid $t=0$). Løys differensiallikninga, dvs finn $y(t)$ gitt ved t, a og k.

Svar

Me har den konstante løysinga $y=a$. Ellers har me

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(y-a)}\frac{dy}{dt} &= k \\
\int 1(y-a)dy &= \int kdt = kt + C_0 \\
\ln(k(y-a)) &= kt + C_0 \\
(y-a) &= \exp(kt + C_0) = Ce^{kt} \\
y &= a + Ce^{kt}
\end{aligned}$$

Set me $C=0$ får me den konstante løysinga $y=a$, og

$$y(t) = a + Ce^{kt}$$

Ved $t=0$ er vatnet i karet 40^oC, altså er $y(0) = 40 = a + C \;\Rightarrow\; C = 40 - a$ og

$$\underline{y(t) = a + (40-a)e^{kt}}$$

d) *To timar etter at strømmen er slått av har temperaturen i vatnet sunke med $5^o C$. Anta at temperaturen ute held seg konstant på $10^o C$, kva er då temperaturen i vatnet kl 0700 neste morgon?*

Svar

Me har oppgitt at $a=10$ altså er

$$y = 10 + 30e^{kt}$$

Bruker at $y(t=2) = 35$ for å finne konstanten k

$$35 = 10 + 30e^{2k} \;\Rightarrow e^{2k} = \frac{25}{30} \;\Rightarrow k = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{6}$$
$$y = 10 + 30exp\Big(\frac{t}{2}\ln\frac{5}{6}\Big)$$

Klokka 0700 neste morgon har det gått 9 timar sidan strømmen vart slått av:

$$y = 10 + 30\exp\left(\frac{9}{2}\ln\frac{5}{6}\right) = \underline{23.21}$$

Det er altså 23^oC i badevatnet kl 0700 neste morgon.

Trine Mykkeltvedt Hilde Kristine Hvidevold