UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I
Mandag 16. desember 2013, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 3 sider (med oppgavene 1–9) og består av 18 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (eksempelvis teller oppgave 1(a) like mye som hele oppgave 2).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

(a) La w være det komplekse tallet med hovedargument $\pi/16$ og modulus $|w| = e^{\frac{1}{8}\ln 2}$. Regn ut w^4 og skriv svaret på formen $x + iy$.

(b) Skriv opp alle komplekse løsninger til $z^4 = -4$ på formen $x + iy$.

(c) Skriv tallet $\frac{1+2i}{1-i}$ på formen $x + iy$.

Svar

(a) Vi kan først skrive w på polarform

$$w = e^{\frac{1}{8}\ln 2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

og så finne w^4 ved å bruke de Moivres formel

$$w^4 = (e^{\frac{1}{8}\ln 2})^4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

(b) Her må vi finne alle fjerde røttene av tallet -4. Vi skriver først -4 på polarform

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi),$$

Prinsipalroten er da

$$w_1 = 4^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i,$$

og de andre tre røttene blir

$$w_2 = 4^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 + i,$$

$$w_3 = 4^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i,$$

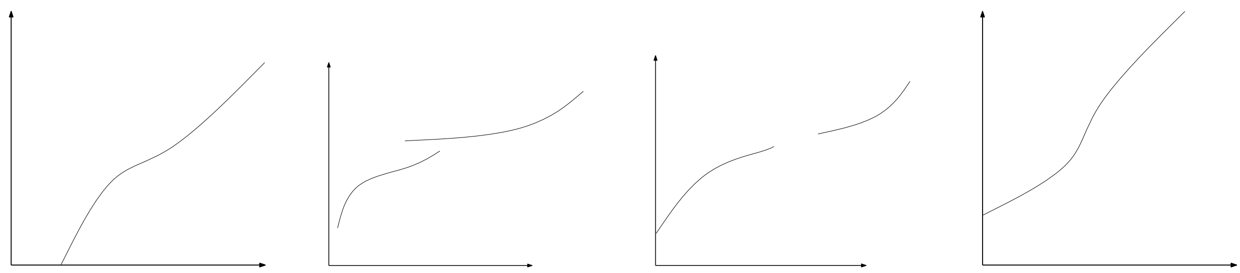
$$w_3 = 4^{\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - i,$$

(c) Vi ganger både telleren og nevneren med det komplekse konjugerte av nevneren, og så kommer frem til svaret

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i-2}{1-i+i+1} = \frac{-1+3i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}.$$

Oppgave 2

I figurene under er tegnet grafen til tre funksjoner og noe som ikke er graf til noen funksjon. Av de tre funksjonene er to inverse til hverandre.



(i) (ii) (iii) (iv)

Hvilke av figurene viser grafer til funksjoner?
Hvilke figurer viser grafer til funksjoner som er en-til-en?
Hvilke figurer viser funksjoner som er inverse til hverandre?

Svar
Figur (ii) viser ikke grafen til en funksjon fordi der finnes en lodrett linje som snitter figuren på to steder. De øvrige figurene viser grafer til funksjoner som er en-til-en fordi de alle snitter vannrett linjer på høyst et sted.
Figurene (i) og (iv) viser funksjoner som er inverse til hverandre, fordi den ene er speilingen av den andre om linjen $y = x$.

Oppgave 3

La $f(x)$ være en funksjon med $f(1)=2$ og $f'(1)=3$.

(a) Skriv opp en ligning for tangenten til $f^{-1}(x)$ i punktet $(2,1)$.

(b) Skriv opp en ligning for tangenten til funksjonen $g(x)=f(\frac{1}{x})$ i punktet $(1,2)$.

(c) La $f(x)=3x-1$ og la $g(x)=f(\frac{1}{x})$. Beregn $g'(x)$. Skisser grafen til funksjonen $g(x)$ og skisser tangenten til $g(x)$ i punktet $(1,2)$.

Svar

(a) La $h(x)=f^{-1}(x)$. Ligningen for tangen til $h(x)$ i punktet (x_0,y_0) gis ved

$$y=h'(x_0)(x-x_0)+y_0.$$

For å finne $h'(2)$, bruker vi formelen

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

slik at

$$h'(2)=(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}.$$

Ligningen for tangenten blir da

$$y=\frac{1}{3}(x-2)+1=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}.$$

(b) Vi bruker samme formel for tangenten som i (a). Denne gangen må vi først finne $g'(1)$.

$$g'(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=f'(\frac{1}{x})\cdot(\frac{-1}{x^2})=\frac{-f'(\frac{1}{x})}{x^2}.$$

$$g'(1)=\frac{-f'(1)}{1^2}=-3.$$

Ligningen blir da

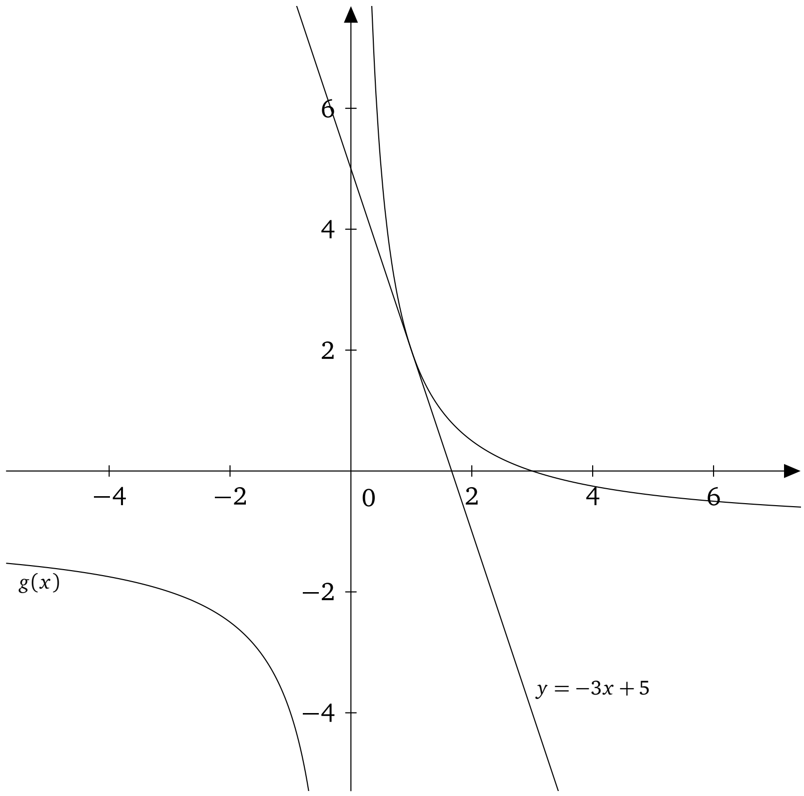
$$y=-3(x-1)+2=-3x+5.$$

(c) $g(x)=\frac{3}{x}-1$, $g'(x)=-\frac{3}{x^2}$, tangenten til $g(x)$ i punktet $(1,2)$ gis ved ligningen $y=-3x+5$. Figur 1 viser grafene til $g(x)$ og dens tangent.

Oppgave 4

(a) Bekreft direkte fra ε-δ-definisjonen at

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}.$$



Figur 1: Oppgave 3 (c).

(b) Bekreft at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{3}\cos x & \text{for } x < 0, \\ \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}x & \text{for } x \geq 0, \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$ ved å vise at

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Svar

(a) Vi viser at for ethvert reelt tall $\varepsilon > 0$ finnes det et tall $\delta > 0$ (avhengig av ε) slik at

$$0 \neq |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon.$$

Vi regner på det vi vil gjøre mindre enn ε:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2 - x}{2x} = (2 - x)\frac{1}{2x}$$

Ved å kreve $0 < \delta \leq 1$ og $|x - 2| < \delta$ sikrer vi at $x > 1$, så $\left|\frac{1}{2x}\right| < \frac{1}{2}$. Ved å kreve både $0 < \delta \leq 2\varepsilon$ og $0 < \delta \leq 1$ sikrer vi at hvis $|x - 2| < \delta$, da er

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right| = |2 - x| \left| \frac{1}{2x} \right| < 2\varepsilon \frac{1}{2} = \epsilon.$$

Derfor velger vi $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$ til å være det minste av tallene 1 og 2ε. Regningen over viser at hvis $0 \neq |x-2| < \delta$, da er $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

(b) La $g_1(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos x$, og $g_2(x) = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}x$. Legg merke til at $g_1(0) = g_2(0) = f(0)$, og at g_1 og g_2 begge er deriverbare i $x = 0$ med $g_1'(0) = \frac{2}{3}\sin 0 = 0$ og $g_2'(0) = \frac{2}{3}e^{2\cdot 0} - \frac{2}{3} = 0$. Derfor har vi

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{g_2(h)-g_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g_2(h)-g_2(0)}{h} = g_2'(0) = 0,$$

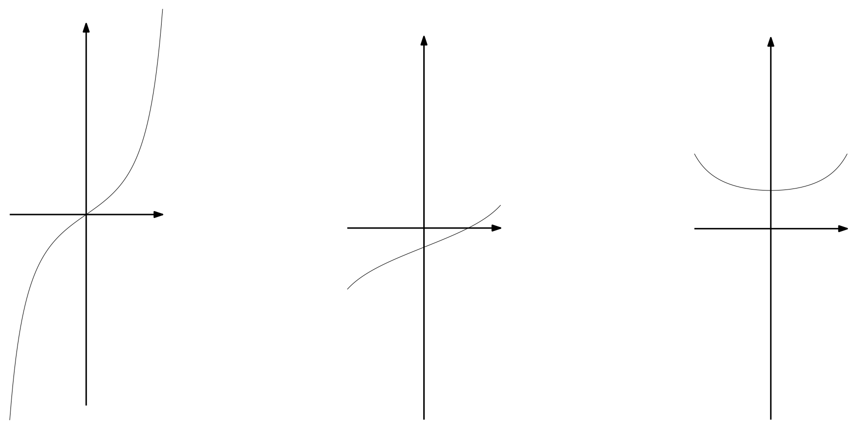
og

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{g_1(h)-g_1(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g_1(h)-g_1(0)}{h} = g_1' = 0,$$

Vi har verifisert at $\lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$, så $f(x)$ er deriverbar i $x = 0$ med $f'(0) = 0$.

Oppgave 5

Figuren under viser grafene til en funksjon $f(x)$, den deriverte $f'(x)$ til $f(x)$ og den dobbeltderiverte $f''(x)$ til $f(x)$.



(i) (ii) (iii)

Forklar hvordan du kan se hvilken av grafene som viser $f(x)$, hvilken som viser $f'(x)$ og hvilken som viser $f''(x)$.

Svar

Funksjonen (ii) har negative verdier for små positive verdier av x og kan dermed ikke være den deriverte av funksjon (i) eller funksjon (iii), fordi både (i) og (iii) er stigende når $x > 0$. Vi kan dermed konkludere at figuren (ii) viser grafen til $f(x)$.

Funksjonen $f'(x)$ må være positiv, fordi $f(x)$ er stigende, som betyr at grafen til $f'(x)$ er vist på figuren (iii), og at figuren (i) viser grafen til $f''(x)$.

Oppgave 6

(a) La $f(x)$ være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Finn et tall s med $|s| < 0{,}001$ slik at $f(s) = 1$ og et tall t med $|t| < 0{,}001$ slik at $f(t) = -1$. Forklar i ord hvorfor grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke eksisterer. Gi et formelt bevis for dette, direkte fra definisjonen.

(b) La $g(x)$ være funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x\ \sin(\ln|x|), & x \neq 0. \end{cases}$$

Vis at $g(x)$ er en kontinuerlig funksjon.

Svar

(a) Vi har at $\sin\frac{1}{s} = 1$ hvis og bare hvis $\frac{1}{s} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ for et heltall n.

Å finne et slik tall s med $|s| < 0{,}001$, er det samme som å finne st slikt tall med $\left|\frac{1}{s}\right| > 1000$.

Vi er altså ute etter et heltall n slik at $\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right| > 1000$. Velger vi for eksempel $n = 1000$ oppfyller er

$$\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right| = \frac{\pi}{2} + 2000\pi > 1000.$$

Det vil si at tallet

$$s = \frac{\pi}{2} + 2000\pi$$

er slik at $s < 0{,}001$ og $\sin(s) = 1$.

Tilsvarende har vi at $\sin\frac{1}{s} = -1$ hvis og bare hvis $\frac{1}{s} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ for et heltall n.

Å finne et slik tall s med $|s| < 0{,}001$, er det samme som å finne st slikt tall med $\left|\frac{1}{s}\right| > 1000$.

Vi er altså ute etter et heltall n slik at $\left|\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right| > 1000$. Velger vi for eksempel $n = 1000$ oppfyller er

$$\left|\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right| = \frac{3\pi}{2} + 2000\pi > 1000.$$

Det vil si at tallet

$$s = \frac{3\pi}{2} + 2000\pi$$

er slik at $s < 0{,}001$ og $\sin(s) = -11$.

Grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer ikke, fordi det finnes vilkårlig små tall s med $f(s) = 1$ og vilkårlig små tall s med $f(s) = -1$, og grensen kan ikke konvergere mot både 1 og -1.

La oss gi et formelt bevis for dette. Til ethvert tall $\delta > 0$ kan vi finne et heltall n slik at både

$$\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right| > \frac{1}{\delta}$$

og

$$\left|\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right| > \frac{1}{\delta}.$$

(For eksempel kan vi la n være det minste positive heltall med $n > \frac{1}{\delta}$.) Anta at grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$ eksisterer, og $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. Vi viser at det ikke finnes noe tall $\delta > 0$ slik at

$$0 \neq |s| < \delta \Rightarrow |f(s) - L| < 1.$$

Anta motsetningsvis at en slik $\delta > 0$ eksisterer. Velg n som ovenfor og la

$$s_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

og

$$s_2 = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Da er $f(s_1) = 1$ og $f(s_2) = -1$ og vi har $0 < s_1 < \delta$ og $0 < s_2 < \delta$. Per antagelse om δ er både $|f(s_1) - L| < 1$ og $|f(s_2) - L| < 1$. Trekantsulikheten gir da at

$$2 = |-1-1| = |(f(s_2) - L) + (L - f(s_1))| < |f(s_2) - L| + |L - f(s_1)| < 2.$$

Dette er absurd, så antakelsen om δ kan ikke være sann for noen $\delta > 0$. Dermed har vi vist at grensen $\lim_{x\to 0} f(x)$ ikke eksisterer.

(b) Funksjonene x, $\sin(x)$, $|x|$, er kontinuerlige for alle x, og funksjonen $\ln x$ er kontinuerlig for $x > 0$. Derfor er funksjonen $g(x)$ kontinuerlig i alle $x \neq 0$, og vi trenger bare å sjekke kontinuiteten i $x = 0$, dvs. at $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$. For å bevise dette, kan vi bruke skviseteoremet:

$$-|x| < x\sin(\ln|x|) < |x|,$$

$$\lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0}(-|x|) = 0,$$

derfor

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

Oppgave 7

Mengden av radioaktivt stoff i en stein oppfyller initialverdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -cm, \\ m_0 = 1 \text{ mg}, \end{cases}$$

der c er en konstant og $m = m(t)$ er massen ved tid t til det radioaktive stoffet målt i milligram (mg). Halveringstiden til det radioaktive stoffet er 10 år, så $m(10 \text{ år}) = 0,5$ mg.
Løs initialverdiproblemet og beregn massen til det radioaktive stoffet etter 5 år.

Svar

Vi vet at initialverdiproblemet

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -cm, \\ m_0 = 1 \text{ mg}, \end{cases}$$

har en entydig løsning $m(t) = e^{-ct}$. For å finne konstanten c bruker vi informasjonen om halveringstiden:

$$e^{-10c} = 0,5,$$
$$-10c = -\ln 2,$$
$$c = \frac{\ln 2}{10}.$$

Derfor er massen til det radioaktive stoffet etter 5 år lik

$$m(5) = e^{-5\frac{\ln 2}{10}} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \text{ mg}.$$

Oppgave 8

(a) Bekreft, direkte fra definisjonen $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, at funksjonen $y = \tanh x$ er en løsning til differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

(b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2, \qquad y(0) = \tanh(2),$$

og beregn $y(-2)$.

Svar

(a) Dette er rett frem:

$$\tanh' x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (\tanh x)^2.$$

(b) Ligningen

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2,$$

er separabel og kan omskrives på formen

$$\frac{dy}{1 - y^2} = dx,$$

$$\tanh^{-1}(y) = x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$y = \tanh(x + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Vi bruker initialbetingelsen og finner at $c = 2$, dvs.

$$y = \tanh(x + 2),$$

og

$$y(-2) = \tanh(0) = 0.$$

Oppgave 9

La $f(x)$ være en funksjon med $f(0) = 1$ og $f'(0) = 0$ slik at alle de høyere deriverte funksjoner $f^{(n)}(x)$ er definert på hele den reelle aksen og slik at $f''(x) = xf(x)$.

(a) Beregn $f''(0)$, skriv opp det andre Taylorpolynomet $P_2(x)$ for $f(x)$ om $x = 0$ og finn $P_2(1)$.

(b) Finn det fjerde Taylorpolynomet $P_4(x)$ for $f(x)$ om $x = 0$ og beregn $P_4(1)$.

(c) La $n \geq 2$ og la $P_n(x)$ være det n-te Taylorpolynomet for $f(x)$ om $x = 0$. Forklar hvorfor $P_n''(x)$ er det $(n-2)$-te Taylorpolynomet til $f''(x)$, og forklar hvordan det følger av Taylors formel med restledd at der finnes en funksjon $g(x)$ som er kontinuerlig i $x = 0$ slik at $P_n''(x) - xP_n(x) = x^{n-1}g(x)$.

Svar

(a)

$$f''(0) = 0 \cdot f(0) = 0,$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1,$$
$$P_2(1) = 1.$$

(b)

$$f'''(x) = (xf(x))' = f(x) + xf'(x), \quad f'''(0) = f(0) + 0f(0) = 1,$$
$$f''''(x) = (f(x) + xf'(x))' = f'(x) + f'(x) + xf''(x) = 2f'(x) + x^2 f(x),$$
$$f''''(0) = 0,$$
$$P_4(x) = 1 + \frac{x^3}{6},$$

(c) n-te Taylorpolynom for $f(x)$ om $x = 0$ gis ved formelen

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Vi deriverer dette uttrykket to ganger, og finner

$$P_n''(x) = f''(0) + f'''(0)x + \frac{f''''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-2)!}x^{n-2},$$

som er $(n-2)$-te Taylorpolynom for $f''(x)$.

Vi skriver Taylors formler med restledd av n-te grad for $f(x)$ og av $n-2$-re grad for $f''(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(s(x))}{(n+1)!}x^{n+1},$$

hvor $s(x)$ ligger mellom 0 og x, slik at $\lim_{x\to 0} s(x) = 0$ (ifølge skviseteoremet).

$$f''(x) = P_n''(x) + \frac{f^{(n-1)}(t(x))}{(n-1)!}x^{n-1},$$

slik at $\lim_{x\to 0} t(x) = 0$.
Vi uttrykker $P_n(x)$ og $P_n''(x)$ fra disse formlene og får

$$\begin{aligned}
P_n''(x) - xP_n(x) &= f''(x) - \frac{f^{(n-1)}(t(x))}{(n-1)!}x^{n-1} - x\left(f(x) - \frac{f^{(n+1)}(s(x))}{(n+1)!}x^{n+1}\right) \\
&= f''(x) - xf(x) + \frac{f^{(n+1)}(s(x))}{(n+1)!}x^{n+2} - \frac{f^{(n-1)}(t(x))}{(n-1)!}x^{n-1} \\
&= x^{n-1}\left(x^3\frac{f^{(n+1)}(s(x))}{(n+1)!} - \frac{f^{(n-1)}(t(x))}{(n-1)!}\right) = x^{n-1}g(x),
\end{aligned}$$

hvor

$$g(x) = x^3\frac{f^{(n+1)}(s(x))}{(n+1)!} - \frac{f^{(n-1)}(t(x))}{(n-1)!}.$$

Merk at $f^{n+1}(x)$ og $f^{n-1}(x)$ er kontinuerlige for alle $x \in \mathbb{R}$, og at funksjonene $s(x)$ og $t(x)$ er kontinuerlige i $x = 0$. Funksjonen $g(x)$ er dermed kontinuerlig i $x = 0$.

Georgy Ivanov og Morten Brun