UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i emnet MAT111 - Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 15. mai 2013, kl. 09-14

Tillatte hjelpemidler: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex, 7. utgave, eller tidligere utgaver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet er på 4 sider (med oppgavene 1-10) og består av 16 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering (eksempelvis teller oppgave 2a like mye som hele oppgave 1).

Les nøye gjennom oppgavesettet. Alle svar skal begrunnes. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

Finn polarrepresentasjonen til $\sqrt{3} - i$.

Skriv $\dfrac{2i}{\sqrt{3} - i}$ på formen $x + iy$.

Oppgave 2

a Finn det 3. ordens Taylorpolynomet for $f(x) = \frac{1}{1-x}$ om $x = 0$.

b Vis ved induksjon at den n'te deriverte av $f(x) = \frac{1}{1-x}$ er $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

c Finn det n'te ordens Taylorpolynomet for $f(x) = \frac{1}{1-x}$ om $x = 0$.

Oppgave 3

Gitt likningen $x \sin y = e^x$. Bruk implisitt derivasjon til å finne $\frac{dy}{dx}$ uttrykt ved x og y.

Oppgave 4

a Finn grenseverdien eller vis at den ikke eksisterer:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$$

b La funksjonen f være definert på intervallet $(0, \infty)$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ 1 & \text{for } x = 1. \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig.

Oppgave 5

a Bestem integralet

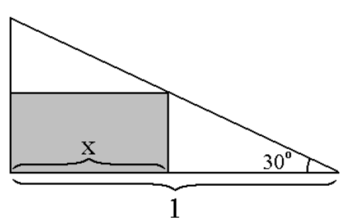
$$\int \frac{1}{x^3+4x} dx.$$

b Bestem integralet

$$\int \frac{\ln x}{x} \sin(\ln x) dx.$$

Oppgave 6

Figuren viser et rektangel innskrevet i en rettvinklet trekant med mål som vist på figuren.



Finn x slik at arealet av rektangelet blir størst mulig.

Oppgave 7

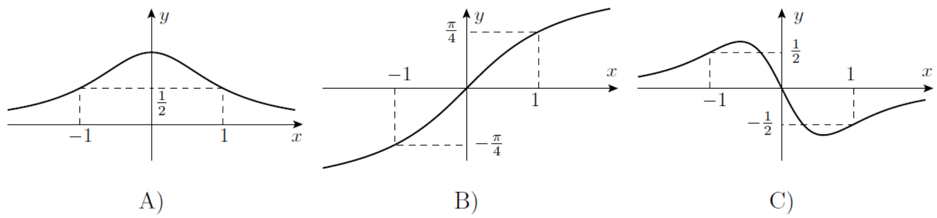
La R være området i xy planet mellom $y = \sin x$ og $y = -\sin x$ fra $x = 0$ til $x = \pi$. Finn volumet av omdreiningslegemet som dannes når R roteres om y-aksen.

Oppgave 8

La f være en gitt funksjon. Figurene nedenfor viser grafene til funksjonene

$$1) \quad f(x) \qquad\qquad 2) \quad f'(x) \qquad\qquad 3) \quad \int_0^x f(t)dt$$

i en eller annen rekkefølge.



Hvilken figur viser hvilken graf? Begrunn svaret.

Finn $\int_{-1}^{1} f(t)dt$.

Oppgave 9

a Finn v som en funksjon av x ved å løse initialverdiproblemet (g og R er konstanter):

$$\begin{cases} v\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{gR^2}{(R+x)^2} \\ \\ v(0) = \sqrt{gR}. \end{cases}$$

b Bruk Simpsons metode med 4 intervall til å finne en tilnærming til det bestemte integralet

$$\int_0^{4000} \sqrt{\frac{6400-x}{6400+x}}dx.$$

Ta med minst tre desimaler i mellomregningene.

c Initialverdiproblemet i oppgave **a** beskriver farten v til en rakett, som en funksjon av rakettens høyde x over bakken. Raketten blir skutt opp med en startfart på $\sqrt{gR}$. Vi antar at den eneste kraften som virker på raketten etter oppskytningen er tyngdekraften fra jorda. Konstanten g er tyngdeakselerasjonen ved jordoverflaten ($\approx 9,81\text{m/s}^2 \approx 127138\text{km/t}^2$) og R er radien til jorda (≈ 6400km).

Avstanden til månen er ca 385000km. Er startfarten til raketten stor nok til at den kan nå helt til månen?

Bruk svaret fra **b** til å finne en tilnærmet verdi for gjennomsnittsfarten til raketten på de første 4000km.

Oppgave 10

La f være en funksjon som er dobbelt deriverbar, dvs. f er deriverbar og f' er deriverbar. Funksjonen f har nøyaktig to kritiske punkt, disse er $x = 1$ og $x = 3$. Den deriverte av f er positiv for $x = 2$.

Vis at $f'(x)$ er positiv for alle $x \in (1, 3)$.

Lykke til!

Mirjam Solberg og Morten Brun