Universitetet i Bergen
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet
Matematisk institutt

BOKMÅL

EKSAMEN I EMNET Mat 111 - Grunnkurs i Matematikk I

Mandag 15. desember 2014
Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemiddel: Lærebok (Adams & Essex: *Calculus - a complete course*) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet består av 17 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Regn ut (på formen $a + ib$)

$$\frac{4-2i}{1-i}.$$

b) Hvilke komplekse tall oppfyller $\overline{z} = -z$ og hvilke oppfyller $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Hvilke to komplekse tall oppfyller begge disse likningene?

c) Finn på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^3 = -8$.

d) Finn på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^2 - 2z + 4 = 0$.

e) Nå ser vi på $x^3 + 8$ som et *reelt* polynom, $x \in \mathbb{R}$. Faktoriser dette polynomet så mye som mulig i et produkt av reelle polynom.

f) Regn ut det reelle integralet

$$\int \frac{x^2}{x^3+8} dx$$

Oppgave 2

a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y'(x) = -\frac{3y}{x}.$$

b) Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$y'(x) = -\frac{3y}{x} + \frac{e^x}{x^3}, \qquad y(1) = 0.$$

Oppgave 3

a) Finn grensen $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^2)}$, eller vis at den går mot uendelig.

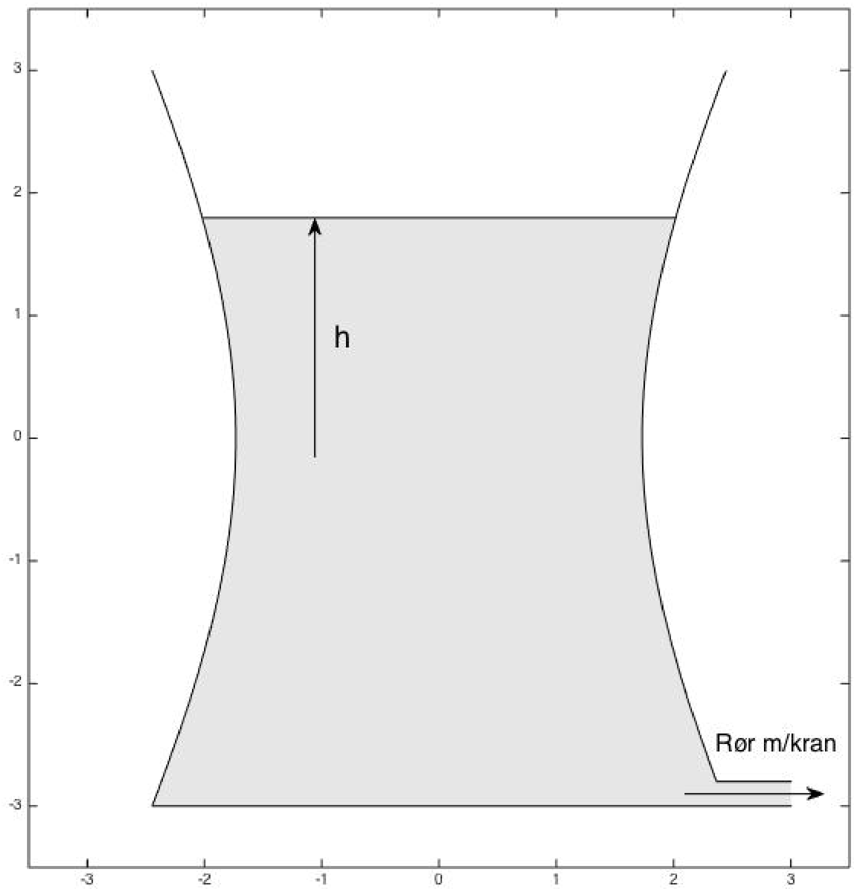
b) Vis at $e^{-\sqrt{x}} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ når $x \to \infty$. Resultatet i **a)** kan være nyttig!

c) Avgjør om de uegentlige integralene $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ og $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerer.

d) Avgjør om det uegentlige integralet $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$ konvergerer. Hint: Bruk **b)**.

Oppgave 4

Homer Simpson vil lage en øltank til Moe's Tavern, utformet som kjøletårnet på atomkraftverket i Springfield. Du skal hjelpe Homer med beregningene. Øltanken er et omdreiningslegeme, rotasjonssymmetrisk om y-aksen og begrenset i $x-y$ planet av kurvene $3x^2 - y^2 = 9$, $y = -3$ og $y = 3$. Vi lar h betegne øl-nivå i tanken, slik at $h = -3$ når tanken er tom og $h = 3$ når den er full. La $V(h)$ betegne øl-volumet ved nivå h. Alle lengdemål i oppgaven er i desimeter, alle tider i minutter, dvs. vi får volum i liter, og utstrømming i liter/minutt.



a) Forklar at øl-volum som funksjon av øl-nivå er gitt ved formelen

$$V(h) = \pi \int_{-3}^{h} (3 + y^2/3)dy,$$

og finn øl-volumet når tanken er full, dvs. $h = 3$.

b) I bunnen av tanken er det montert en kran, med et rør der ølet kan tappes ut. I følge Torricellis lov (fra 1643), stømmer det ut med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av trykket. Vi antar her at trykket er proporsjonalt med total væskehøyde over kranen, dvs. $h + 3$. Dermed, når kranen er åpen vil ølet strømme ut av røret og øl-volum synke som

$$\frac{dV}{dt} = -c\sqrt{h+3},$$

der c er en kontstant. La oss anta at $c = 3\pi$ (for å få pene svar). Vis fra dette at øl-nivået som funksjon av tiden er gitt som

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{9\sqrt{h+3}}{h^2+9}. \tag{1}$$

Hint: Du kan finne dV/dh fra integralet i a).

c) Vis enten med substitusjon eller med delvis integrasjon at

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2 - 4x + 23) + C.$$

d) Løs differensiallikningen (1) og finn hvor lang tid tar det å tømme en full tank.

e) I et eksperiment fylles tanken helt opp og man åpner kranen ved $t = 0$. Det tar nøaktig 8 minutter å tømme tanken. Hvert minutt måles strømningshastigheten $v(t)$ i røret, som vist i tabellen.

t (min):	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v(t)$ (dm/min):	207	184	150	114	84	60	39	19	0

Arealet av rørets tverrsnitt er $0.1(\text{dm}^2)$, og dermed er endring av øl-volum gitt ved

$$\frac{dV(t)}{dt} = -0.1 \cdot v(t).$$

Bruk Simpsons regel til å beregne det totale volumet i en full tank, $V(t = 0)$.

Hans Munthe-Kaas Alexander Lundervold