Universitetet i Bergen
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet
Matematisk institutt

BOKMÅL

EKSAMEN I EMNET Mat 111 - Grunnkurs i Matematikk I - LØSNING

Mandag 15. desember 2014
Tid: 09:00–14:00

Tillatte hjelpemiddel: Lærebok (Adams & Essex: *Calculus - a complete course*) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Oppgavesettet består av 17 deloppgaver som alle teller likt ved sensurering. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Regn ut (på formen $a + ib$)

$$\frac{4-2i}{1-i}.$$

Løsning:

$$\frac{(4-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i+4i+2}{1+1} = \underline{\underline{3+i}}.$$

b) Hvilke komplekse tall oppfyller $\overline{z} = -z$ og hvilke oppfyller $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Hvilke to komplekse tall oppfyller begge disse likningene?

Løsning: La $z = a + ib$.

$$\overline{z} = -z \quad \Rightarrow \quad a - ib = -a - ib \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{z = ib}}.$$

$$\overline{z} = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z\overline{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a^2 + b^2 = 1}}.$$

Begge to: Skjæring mellom enhetssirkelen og imaginære akse, dvs. tallene $\underline{\underline{z = i \text{ og } z = -i}}$.

c) Finn på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^3 = -8$.

Løsning: La $w = -8$. Da er $|w| = 8$ og $\arg(w) = \pi$. Følgelig må $|z| = 8^{1/3} = 2$ og $\arg z \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi+2\pi}{3} = \pi, \frac{\pi+4\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\}$. Siden $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ får vi de tre løsningene

$$\underline{\underline{z = -2, \qquad z = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z = 1 - i\sqrt{3}}}.$$

d) Finn på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^2 - 2z + 4 = 0$.

Løsning: Bruker vanlig formel for 2. grads likning og finner $\underline{\underline{z = 1 \pm i\sqrt{3}}}$.

e) Nå ser vi på $x^3 + 8$ som et *reelt* polynom, $x \in \mathbb{R}$. Faktoriser dette polynomet så mye som mulig i et produkt av reelle polynom.

Løsning: Polynomdivisjon: $x^3 + 8/(x + 2) = x^2 - 2x + 4$. Dermed er

$$\underline{\underline{x^3 + 8 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4)}}.$$

Faktoriseringen er maksimal fordi diskriminanten er negativ. $D = (-2)^2 - 4 \cdot 4 = -12 < 0$.

f) Regn ut det reelle integralet

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx$$

Løsning: Dette er veldig lett, fordi teller er den deriverte av nevner (på en konstant nær).

$$\underline{\underline{\int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} \ln \left| x^3 + 8 \right| + C}}.$$

Men mange vil nok gjøre delbrøkoppspalting.

$$\frac{x^2}{x^3 + 8} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4} \quad \Rightarrow A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2) = x^2.$$

Setter vi inn $x = -2$ gir dette

$$A = \left. \frac{x^2}{x^2 - 2x + 4} \right|_{x=-2} = \frac{1}{3}.$$

Fra konstantleddet ser vi så at $4A + 2C = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. Tilslutt, fra x^2 leddet får vi $Ax^2 + Bx^2 = x^2 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$. Dermed:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 + 8} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+2} + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4}\right) dx = \frac{1}{3}(\ln|x+2| + \ln|x^2 - 2x + 4|) + C = \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln\left|x^3 + 8\right| + C}}.$$

Oppgave 2

a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y'(x) = -\frac{3y}{x}.$$

Løsning: Separabel likning.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -3\ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = c'x^{-3}}}.$$

Her er fortegnet i $|y|$ og $|x|$ gått inn i konstanten $c' = \pm e^c$.

b) Finn løsningen til initialverdiproblemet

$$y'(x) = -\frac{3y}{x} + \frac{e^x}{x^3}, \qquad y(1) = 0.$$

Løsning: Førsteordens lineær likning. La $\mu(x) = \int \frac{3}{x}dx$, $\mu(x) = 3\ln x$. Integrerende faktor: $e^{\mu}(x) = x^3$. Dermed

$$x^3(y' + \frac{3y}{x}) = (x^3y)' = x^3\frac{e^x}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^3y' = e^x + c \quad \Rightarrow y = \frac{e^x + c}{x^3}$$

$y(1) = 0$ gir $c = -e$ og $\underline{\underline{y = \frac{e^x - e}{x^3}}}$.

Siden vi løste den homogene likningen i a) kunne vi alternativt brukt variasjon av parameteren, $y(x) = \frac{c(x)}{x^3}$, som innsatt i likningen gir $c'(x) = e^x$, og dermed $c(x) = e^x + c'$.

Oppgave 3

a) Finn grensen $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^2)}$, eller vis at den går mot uendelig.

Løsning: L'Hospital. (sjekk at betingelsene er oppfylt).

$$\frac{(\sqrt{x})'}{(2\ln(x))'} = \frac{1/(2\sqrt{x})}{2/x} = \frac{\sqrt{x}}{4} \to \infty \quad \text{når } x \to \infty.$$

b) Vis at $e^{-\sqrt{x}} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ når $x \to \infty$. Resultatet i **a)** kan være nyttig!

Løsning: Fra a) følger at det finnes en M slik at $\sqrt{x} > \ln(x^2)$ for alle $x > M$. Siden $x \mapsto e^{-x}$ er en strengt avtakende funksjon må vi ha at $e^{-\sqrt{x}} < x^{-2}$ for alle $x > M$. Det betyr at $\underline{\underline{e^{-\sqrt{x}} = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})}}$.

c) Avgjør om de uegentlige integralene $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ og $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerer.

Løsning: Dette er veldig standard, kan regnes ut direkte. Det første divergerer, det andre konvergerer.

d) Avgjør om det uegentlige integralet $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$ konvergerer. Hint: Bruk **b)**.

Løsning: Fra a) vet vi at det finnes en M slik at $e^{-\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$ for alle $x > M$ (funksjonene er begge positive, så vi behøver ikke absoluttverdiene som inngår i definisjonen av stor-O). Vi vet at $e^{-\sqrt{x}}$ ikke har singulariteter, så det er ingen problemer med endelige integral. Siden $e^{-\sqrt{x}} > 0$ for alle x, er det nok å sjekke at integralet ikke divergerer mot uendelig.

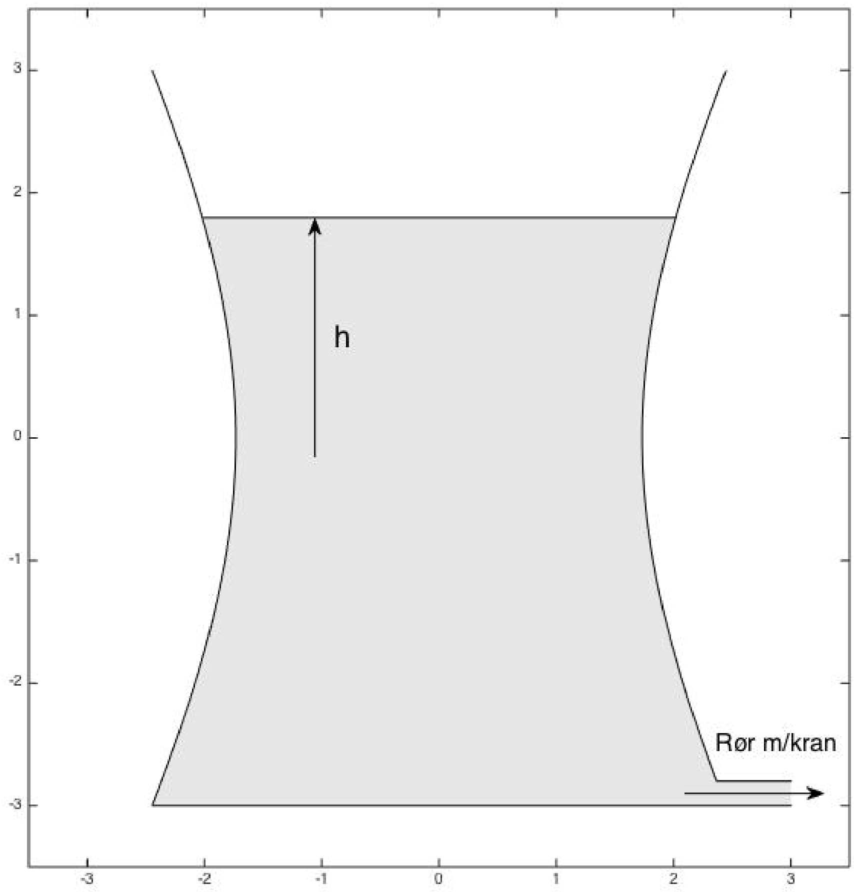
$$0 < \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx = \int_0^M e^{-\sqrt{x}} dx + \int_M^\infty e^{-\sqrt{x}} dx < C + \int_M^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Altså eksisterer integralet (konvergerer).

Full score på dette punkt forutsetter at man både bruker at integranden er ikke-negativ, og at den er begrenset av en funksjon med endelig integral.

Oppgave 4

Homer Simpson vil lage en øltank til Moe's Tavern, utformet som kjøletårnet på atomkraftverket i Springfield. Du skal hjelpe Homer med beregningene. Øltanken er et omdreiningslegeme, rotasjonssymmetrisk om y-aksen og begrenset i $x-y$ planet av kurvene $3x^2 - y^2 = 9$, $y = -3$ og $y = 3$. Vi lar h betegne øl-nivå i tanken, slik at $h = -3$ når tanken er tom og $h = 3$ når den er full. La $V(h)$ betegne øl-volumet ved nivå h. Alle lengdemål i oppgaven er i desimeter, alle tider i minutter, dvs. vi får volum i liter, og utstrømming i liter/minutt.



a) Forklar at øl-volum som funksjon av øl-nivå er gitt ved formelen

$$V(h) = \pi \int_{-3}^{h} (3 + y^2/3)dy,$$

og finn øl-volumet når tanken er full, dvs. $h = 3$.

Løsning: Vi snitter tanken opp i horisontale skiver langs y-aksen. En skive i høyde y har volum

$$dV = \pi x^2 dy = \pi \left(3 + y^2/3\right) dy.$$

Dette må integreres fra $y = -3$ til $y = h$. Når $h = 3$ har vi full tank:

$$\underline{\underline{V_{\text{full}}}} = \pi \int_{-3}^{3} (3 + y^2/3)dy = \pi(3y + y^3/9)\Big|_{-3}^{3} = \underline{\underline{24\pi}} \approx 75.4.$$

b) I bunnen av tanken er det montert en kran, med et rør der ølet kan tappes ut. I følge Torricellis lov (fra 1643), stømmer det ut med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av trykket. Vi antar her at trykket er proporsjonalt med total væskehøyde over kranen, dvs. $h+3$. Dermed, når kranen er åpen vil ølet strømme ut av røret og øl-volum synke som

$$\frac{dV}{dt} = -c\sqrt{h+3},$$

der c er en kontstant. La oss anta at $c = 3\pi$ (for å få pene svar). Vis fra dette at øl-nivået som funksjon av tiden er gitt som

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{9\sqrt{h+3}}{h^2+9}. \tag{1}$$

Hint: Du kan finne dV/dh fra integralet i a).

Løsning: Vi har $dV/dt = -3\pi\sqrt{h+3}$, og ved derivasjon av integralet i a): $dV/dh = 3\pi(1+h^2/9)$. Dermed

$$dV = -3\pi\sqrt{h+3}dt = 3\pi(1+h^2/9)dh \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{h+3}}{1+h^2/9}.$$

c) Vis enten med substitusjon eller med delvis integrasjon at

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx = \frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2-4x+23)+C.$$

Løsning: Ved substitusjon $u^2 = x+1$ får vi $2udu = dx$ og $x^2+1 = (u^2-1)^2+1 = u^4-2u^2+2$, som gir

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx &= \int \frac{u^4-2u^2+2}{u}2udu = 2\int(u^4-2u^2+2)du = 2(\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}u^3+2u)\\ &= 2u(\frac{1}{5}u^4-\frac{2}{3}u^2+2) = 2\sqrt{x+1}(\frac{1}{5}(x+1)^2-\frac{2}{3}(x+1)+2) =\\ &= \frac{2}{15}\sqrt{x+1}(3(x+1)^2-10(x+1)+30) = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2-4x+23)+C.}}\end{aligned}$$

Delvis integrasjon to ganger, først med $u = x^2 + 1$ og $v' = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$, og deretter $u = -4x$ og $v' = (x+1)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx &= (x^2+1)\cdot 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - \int 2x \cdot 2(x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\
&= 2(x^2+1)\sqrt{x+1} - 4x\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \int 4\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\
&= 2(x^2+1)\sqrt{x+1} - \frac{8}{3}x(x+1)\sqrt{x+1} + \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\
&= \frac{2\sqrt{x+1}}{15}(15(x^2+1) - 20x(x+1) + 8(x+1)^2) \\
&= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2 - 4x + 23) + C.}}
\end{aligned}$$

Dette kan også løses med ubestemte koeffisienters metode, men det er ikke pensum. Ubestemte koeffisienter: Det er mulig å gjette at løsningen må være på formen $F(x) = \sqrt{x+1}(ax^2+bx+c)$, fordi dette gir $F'(x) = p(x)/\sqrt{x+1}$ for et andregrads polynom $p(x)$. Rett fram derivasjon og litt regning (detaljer utelatt) viser at $p(x) = (5a/2)x^2 + (2a+3b/2)x + b + c/2$. Herfra får vi $a = 2/5$, $b = -4a/3 = -8/15$ og $b + c/2 = 1$, som gir $c = 46/15$.

Hva er lettest? Antakelig ubestemte koeffisienter, dersom man være smart nok til å gjette rett form på løsningen. Delvis integrasjon er kanskje den mest rett fram metoden, den krever lite fantasi, men en god del regning.

d) Løs differensiallikningen (1) og finn hvor lang tid tar det å tømme en full tank.

Løsning: Separabel diff likning løses:

$$\int \frac{h^2+9}{9\sqrt{h+3}}dh = -\int dt.$$

Vi setter $h = 3x$, $dh = 3dx$ som gir

$$\begin{aligned}
\int \frac{h^2+9}{9\sqrt{h+3}}dh &= \int \frac{9x^2+9}{9\sqrt{3x+3}}3dx = \sqrt{3}\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}dx = \sqrt{3}\frac{2\sqrt{x+1}}{15}(3x^2-4x+23) \\
&= \frac{2\sqrt{3x+3}}{15}(3x^2-4x+23) = \frac{2\sqrt{h+3}}{15}(\frac{h^2}{3} - \frac{4}{3}h + 23).
\end{aligned}$$

Løsningen av likningen er dermed

$$\underline{\underline{\sqrt{h+3}(\frac{h^2}{3}-\frac{4}{3}h+23)=-\frac{15}{2}t+C.}}$$

Ved $t=0$ er tanken full og dermed $h=3$. Dette gir

$$C=\sqrt{6}(3-4+23)=22\sqrt{6}.$$

Når tanken er tom, $t=t_{\text{tom}}$, har vi $h=-3$ som gir $0=-\frac{15}{2}t_{\text{tom}}+C$,

$$\underline{\underline{t_{\text{tom}}}}=\frac{2}{15}C=\underline{\underline{\frac{44\sqrt{6}}{15}}}\approx 7.2.$$

e) I et eksperiment fylles tanken helt opp og man åpner kranen ved $t=0$. Det tar nøaktig 8 minutter å tømme tanken. Hvert minutt måles strømningshastigheten $v(t)$ i røret, som vist i tabellen.

t (min):	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v(t)$ (dm/min):	207	184	150	114	84	60	39	19	0

Arealet av rørets tverrsnitt er 0.1(dm^2), og dermed er endring av øl-volum gitt ved

$$\frac{dV(t)}{dt}=-0.1\cdot v(t).$$

Bruk Simpsons regel til å beregne det totale volumet i en full tank, $V(t=0)$.
Løsning:

$$V(0)=V(0)-V(8)=\int_8^0(-0.1v(t))dt=0.1\int_0^8 v(t)dt.$$

$\int_0^8 v(t)dt$ finnes med Simpsons regel, $\Delta t=1$:

```
sum([207 184 150 114 84 60 39 19 0].*[1 4 2 4 2 4 2 4 1])/3
ans = 753.6667
```

Dermed er volumet $V(0)=\underline{\underline{75.4}}$ liter.

Hans Munthe-Kaas Alexander Lundervold