Løsningsforslag til eksamen i MAT111 Vår 2014

Oppgave 1

Finn polarrepresentasjonen til $z = -3 + \sqrt{3}i$ og til $w = 3 + \sqrt{3}i$. Regn ut $\dfrac{z}{w}$.

Løsning

Finner først modulus og argument til $z = -3 + \sqrt{3}i$ og til $w = 3 + \sqrt{3}i$:

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\
|w| &= \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\
\arg(z) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-3}\right) = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} && (z \text{ ligger i andre kvadrant}) \\
\arg(w) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} && (w \text{ ligger i første kvadrant})
\end{aligned}
$$

Polarrepresentasjonen til heholdsvis z og w blir da

$$
\begin{aligned}
z &= 2\sqrt{3}\cos(\frac{5\pi}{6}) + i2\sqrt{3}\sin(\frac{5\pi}{6}) \\
w &= 2\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{6}) + i2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{6}).
\end{aligned}
$$

Vi kan regne ut brøken på to måter. Vi kan bruke polarrepresentasjonen til z og w:

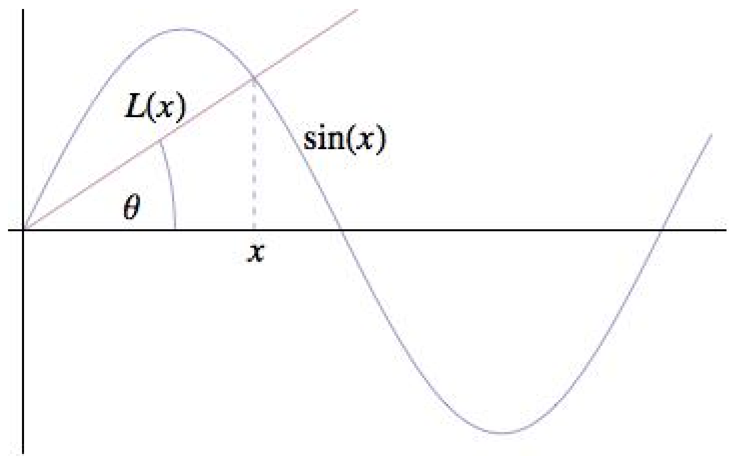
$$
\frac{z}{w} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) + i\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i.
$$

Eller vi kan regne ut brøken direkte:

$$
\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(-3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}{(2\sqrt{3})^2} = \frac{-9 + 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3i^2}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i.
$$

Oppgave 2
La $L(x)$ være den rette linjen gjennom origo som skjærer grafen til $y = \sin x$ i punktet $(x, \sin x)$. La $\theta(x)$ være vinkelen mellom $L(x)$ og x-aksen. Hva er endringsraten til θ med hensyn på x?

Løsning



Først setter vi opp en likning som beskriver sammenhengen mellom $\theta(x)$ og x:

$$\tan(\theta(x)) = \frac{\sin x}{x}.$$

Endringsraten til θ med hensyn på x er $\frac{d\theta}{dx}$. Vi bruker implisitt derivasjon:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\tan(\theta(x)) &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x} \\ (1 + \tan^2(\theta(x)))\frac{d\theta}{dx} &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \end{aligned}$$

Vi setter inn for $\tan(\theta(x))$:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\sin^2 x}{x^2})\frac{d\theta}{dx} &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(1 + \frac{\sin^2 x}{x^2})} \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 + \sin^2 x} \end{aligned}$$

Endringsraten til θ med hensyn på x er $\frac{d\theta}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 + \sin^2 x}$.

Oppgave 3

a Bruk delbrøksoppspaltning og integrér for å vise at

$$\int \frac{2x^2+6x-12}{(x+1)(x^2-9)}dx = \ln(x+1)^2 + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.$$

Løsning Bruker først delbrøksoppspaltning:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+6x-12}{(x+1)(x^2-9)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x^2-9) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+3)}{(x+1)(x^2-9)} \\
&= \frac{Ax^2 - 9A + Bx^2 - 2Bx - 3B + Cx^2 + 4Cx + 3C}{(x+1)(x^2-9)}
\end{aligned}$$

Vi får da:

$$A+B+C = 2 \qquad -2B+4C = 6 \qquad -9A-3B+3C = -12$$

Løsningen blir $A = 2$, $B = -1$ og $C = 1$. Integrerer:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+6x-12}{(x+1)(x^2-9)}dx &= \int \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3}dx \\
&= 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + \ln|x-3| + C \\
&= \ln(x+1)^2 + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C
\end{aligned}$$

b Løs initialverdiproblemet:

$$\begin{cases} (x+1)(x^2-9)\dfrac{dy}{dx} = (2x^2+6x-12)y \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Hint: Bruk svaret fra **3a**.

Løsning Dette er en separabel difflikning så vi separerer x og y og integrerer hver side.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}dy &= \int \frac{2x^2+6x-12}{(x+1)(x^2-9)}dx \\
\ln|y| &= \ln(x+1)^2 + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C \\
e^{\ln|y|} &= e^{\ln(x+1)^2 + \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C} \\
y &= e^C(x+1)^2\left|\frac{x-3}{x+3}\right|
\end{aligned}$$

Bruker initialverdibetingelsen $y(0) = 4$:

$$4 = y(0) = e^C (0+1)^2 \left| \frac{0-3}{0+3} \right| = e^C$$

Løsningen på initialverdiproblemet er $y(x) = 4(x+1)^2 \left| \frac{x-3}{x+3} \right|$.

Oppgave 4

4a Finn $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}$, eller vis at grenseverdien ikke eksisterer.

Løsning

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0$$

4b Vis at $\lim\limits_{x \to 1+} (x-1)(\ln(x-1))^2 = 0$.

Løsning

$$\lim_{x \to 1+} (x-1)(\ln(x-1))^2 \quad [0 \cdot \infty] \text{ skriver om:}$$
$$\lim_{x \to 1+} \frac{(\ln(x-1))^2}{\frac{1}{x-1}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Vi kan bruke l'Hôpitals regel siden $(\ln(x-1))^2$ og $\frac{1}{x-1}$ begge er deriverbare og $\left(\frac{1}{x-1}\right)'$ er ulik 0 for $x > 1$.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{((\ln(x-1))^2)'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{2\ln(x-1)}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \to 1+} \frac{2\ln(x-1)}{-\frac{1}{x-1}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Igjen kan vi bruke l'Hôpitals regel siden $2\ln(x-1)$ og $-\frac{1}{x-1}$ begge er deriverbare og $-\left(\frac{1}{x-1}\right)'$ er ulik 0 for $x > 1$.

$$\lim_{x \to 1+} \frac{(2\ln(x-1))'}{\left(-\frac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{2}{x-1}}{\frac{1}{(x-1)^2}} \lim_{x \to 1+} 2(x-1) = 0$$

Derfor er $\lim\limits_{x \to 1+} (x-1)(\ln(x-1))^2 = 0$.

4c La g være funksjonen definert på $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ ved

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x < -1 \\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & \text{for } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{for } x = 1 \\ (x-1)(\ln(x-1))^2 & \text{for } 1 < x. \end{cases}$$

For hvilke punkt i $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ er g kontinuerlig?
Er g en kontinuerlig funksjon?

Løsning På de tre intervallene $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ og $(1, \infty)$ er g kontinuerlig siden funksjonene x^2, $\frac{(x-1)^2}{x^2-1}$ og $(x-1)(\ln(x-1))^2$ er kontinuerlige. For å sjekke om g er kontinuerlig i 1 ser vi på de følgende grenseverdiene:

$$\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 0$$
$$\lim_{x \to 1+} g(x) = \lim_{x \to 1+} (x-1)(\ln(x-1))^2 = 0$$

Siden de to grenseverdiene eksisterer og har samme verdi som $g(1) = 0$ er g kontinuerlig i 1. Så g er kontinuerlig i alle punktene i $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Funksjonen g er kontinuerlig siden den er kontinuerlig i alle punktene i definisjonsmengden.

Oppgave 5

I denne oppgaven studerer vi funksjonen e^{-x^2}, definert på $(-\infty, \infty)$. *Deloppgavene kan løses uavhengig av hverandre.* Vær oppmerksom på at det ikke er mulig å finne et eksplisitt uttrykk for det ubestemte integralet $\int e^{-x^2} dx$.

5a La $f(x) = e^{-x^2}$, regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$. Lag fortegnsskjema for f, f' og f'' og skissér grafen til f.

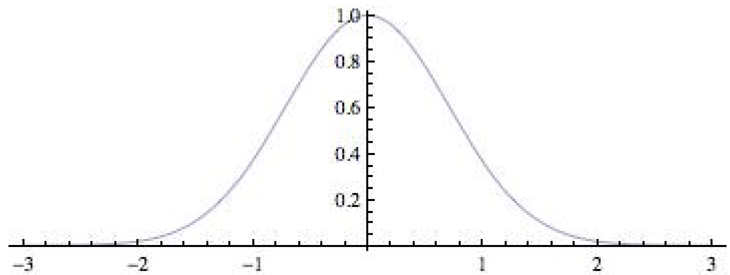
Løsning

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad\qquad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$$

Siden $e^{-x^2} > 0$ for alle x så har $f'(x)$ samme fortegn som $-2x$ og $f''(x)$ har samme fortegn som $4x^2 - 2$. Fortegnsskjemaet blir derfor:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Skisse av grafen:



5b Bruk den formelle definisjonen av grenseverdier til å vise at $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$.
Hint: Du kan bruke (uten å vise det) at $e^{-k} < \frac{1}{k}$ for alle reelle tall k.

Løsning Vi må vise at for enhver $\epsilon > 0$ så finnes det et tall R, slik at hvis $x > R$ så er $|e^{-x^2} - 0| < \epsilon$. Vi begynner med å se på hvordan vi kan begrense $|e^{-x^2} - 0|$:

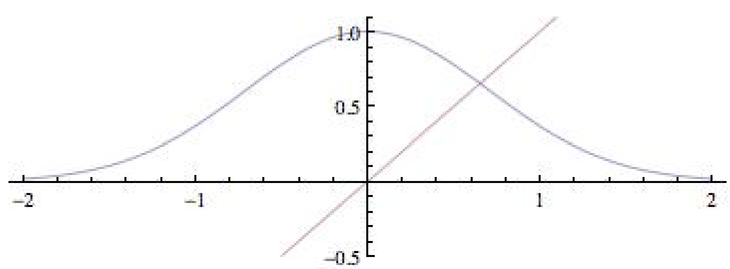
$$|e^{-x^2} - 0| = e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$$

Hvis $x > R$ så er $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{R^2}$. Hvis vi setter $\dfrac{1}{R^2} = \epsilon$ får vi den ønskede begrensningen. Det vil si at R blir $\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

Gitt $\epsilon > 0$, velg $R = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. Hvis $x < R$ så er $|e^{-x^2} - 0| < \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{R^2} = \epsilon$, som var det vi skulle vise.

5c Hvor mange løsninger har likningen $e^{-x^2} = x$? Gi en god begrunnelse for svaret.

Løsning



For $x \leq 0$ er $x \leq 0 < e^{-x^2}$ så likningen har ingen løsning på intervallet $(-\infty, 0]$. På intervallet $(0, \infty)$ er $(e^{-x^2})' < 0$, så e^{-x^2} er strengt synkende og x er strengt voksende, så likningen har maksimalt én løsning her.

For å vise at likningen har en løsning setter vi $h(x) = e^{-x^2} - x$ slik at likningen blir $h(x) = 0$. Vi finner at $h(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ og at $h(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$. Siden h er kontinuerlig kan vi bruke skjæringssetningen som så sier at det finnes en c mellom 0 og 1 slik at $h(c) = 0$. Det vil si at c er en løsning på likningen.

Linkningen har en unik løsning.

5d Finn en tilnærmet løsning til likningen $e^{-x^2} = x$ ved å bruke to iterasjoner av Newtons metode med $x_0 = 0{,}5$.

Løsning Vi skriver om likningen til $e^{-x^2} - x = 0$ og bruker Newtons metode på funksjonen $h(x) = e^{-x^2} - x$. Regner ut $h'(x) = -2xe^{-x^2} - 1$. To iterasjoner av Newtons metode:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0{,}5 \\ x_1 &= x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{e^{-0{,}25} - 0{,}5}{-e^{-0{,}25} - 1} \\ x_2 &= x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \approx 0,6529 \end{aligned}$$

5e Finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ av andre grad til funksjonen e^{-x^2} om $x = 0$. Finn så en tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ ved å bruke $P_2(x)$.

Løsning La $f(x) = e^{-x^2}$. Fra oppgave **5a** får vi $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ og $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. Vi finner verdien til disse funksjonene i 0:

$$f(0) = e^0 = 1 \qquad f'(0) = 0 \qquad f''(0) = -2e^0 = -2$$

Setter så inn i formelen:

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 1 + \frac{0}{1}x + \frac{-2}{2}x^2 = 1 - x^2.$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \approx \int_{-1}^{1} P_2(x) dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

5f Et feilestimat for tilnærmingen i **5e** er gitt ved

$$0{,}16 < \left| \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx - \int_{-1}^{1} P_2(x) dx \right| < 0{,}17$$

(du trenger ikke vise dette). Hvor mange intervall trengs for å være sikker på at trapesmetoden gir en bedre tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ enn tilnærmingen over?

Løsning La $f(x) = e^{-x^2}$. Teorem 4 i kapittel 6.6 gir et feilestimat for trapesmetoden. For å bruke dette må vi finne et tall K slik at $|f''(x)| \leq K|$ for alle x mellom -1 og 1. Siden $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ er en jevn funksjon er det nok å se på x mellom 0 og 1. Vi regner ut den tredje deriverte:

$$f'''(x) = 8xe^{-x^2} + (4x^2 - 2e^{-x^2}(-2x)) = 4x(3 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Siden $f'''(x) > 0$ for $0 < x < 1$ må maksimum og minimumsverdien til $f''(x)$ på intervallet $[0, 1]$ være i endepunktene, $f''(0) = -2$ og $f''(1) = \frac{2}{e}$ så $|f''(x)| \leq 2$ for $x \in [-1, 1]$.

Nå kan vi bruke formelen for feilestimat:

$$\left|\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx - T_n dx\right| \leq \frac{2(1-(-1))^3}{12n^2} = \frac{4}{3n^2}$$

For å være sikker på å få en bedre tilnærming må vi ha $\dfrac{4}{3n^2} \leq 0{,}16$, det gir $n > 2,9$. Vi må bruke minst tre intervall med trapesmetoden for å være sikker på å få en bedre tilnærming.

5g Finn en tilnærming til $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ ved å bruke trapesmetoden med fire intervall.

Løsning La $f(x) = e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx \approx T_4 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f(1)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(f(1) + 2f(\frac{1}{2}) + f(0)\Big) && \text{siden } f \text{ er jevn} \\
&= \frac{1}{2e} + \frac{1}{e^{0,25}} + \frac{1}{2} \quad (\approx 1,463)
\end{aligned}$$

5h La $F(x) = \int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$. Finn $F'(x)$.

Løsning Vi bruker Fundamentalteoremet i kalkulus:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{1}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt = e^{-(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

5i Begrunn om det uegentlige integralet $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$ konvergerer eller divergerer.

Løsning For $x \geq 1$ er $x \leq x^2$ så $\frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}$.

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_{1}^{\infty} e^{-x}dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R} e^{-x}dx = \lim_{R\to\infty} -e^{-x}\Big|_{1}^{R} \\
&= \lim_{R\to\infty} -e^{-R} + e^{-1} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{e} - \frac{1}{e^R} = \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Så det uegentlige integralet $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx$ konvergerer.

Alternativt kan man bruke sammenligningen $e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ fra hintet i oppgave **5b**.