**Universitetet i Bergen**
**Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet**
**Matematisk institutt**

**BOKMÅL**

EKSAMEN I EMNET Løsning: Mat 111 - Grunnkurs i Matematikk I
Mandag 14. desember 2015
Tid: 09:00–14:00

**Tillatte hjelpemiddel:** Lærebok (Adams & Essex: *Calculus - a complete course*) og kalkulator, i samsvar med fakultetets regler.

Eksamen består av 5 oppgaver, med tilsammen 18 deloppgaver. Alle deloppgavene teller likt ved sensurering. Alle svar skal begrunnes, men begrunnelsene skal være korte. Det må være med nok mellomregning til at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

## Oppgave 1

**a)** Regn ut (på formen $a + ib$)

$$\frac{2+4i}{2-2i}.$$

Løsning:

$$\frac{(2+4i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{4+12i-8}{2^2+2^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}}.$$

**b)** Tegn i det komplekse plan alle $z$ slik at $z \cdot \overline{z} = 1$, og marker de komplekse røttene til $z^3 = -i$. Om vi tegner rette streker fra røttene til origo, hvilket bilmerke får vi da?

Løsning: Mercedes . (Rett tegning uten bilnavn gir full score)

**c)** Regn ut på formen $z = a + ib$ alle de komplekse løsningene til likningen $z^3 = -8i$.

Løsning: La $w = -8i$. Da er $|w| = 8$ og $\arg(w) = 3\pi/2$. Følgelig må $|z| = 8^{1/3} = 2$ og $\arg z \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \pi + \pi/6, \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{6}\}$. Siden $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ og $\sin(\pi/6) = 1/2$ får vi de tre løsningene

$$\underline{\underline{z = 2i, \qquad z = -\sqrt{3} - i, \qquad z = \sqrt{3} - i.}}$$

**d)** Vis at dersom et reelt polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, har en kompleks rot $z$, så må også $\overline{z}$ være en rot.
Hvorfor må alle reelle 3. grads polynom ha minst én *reell* rot?
Løsning:

$$0 = az^3 + bz^2 + cz + d \Rightarrow 0 = \overline{az^3 + bz^2 + cz + d} = \overline{a}\overline{z}^3 + \overline{b}\overline{z}^2 + \overline{c}\overline{z} + \overline{d} = a\overline{z}^3 + b\overline{z}^2 + c\overline{z} + d$$

fordi $a = \overline{a}, b = \overline{b}, c = \overline{c}$. Dermed er $\overline{z}$ også en rot. Et reelt 3. grads polynom kan altså ha 0 eller 2 komplekse røtter og dermed 3 eller 1 reell rot. Vi kan også bruke skjæringssetningen til å vise dette, for store $x$ må fortegnet til $p(x)$ og $p(-x)$ være motsatt, og i $[-x, x]$ må det da finnes en reell rot.

## Oppgave 2

**a)** Bestem grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

Løsning: L'Hospital:

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-1} \frac{2x + 4}{2x + 2} \to \frac{2}{\pm 0} \to \begin{cases} +\infty & \text{fra høyre} \\ -\infty & \text{fra venstre} \end{cases}.$$

Eventuelt faktorisere og forkorte: $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \to \pm\infty, x \to -1$.
$\underline{\underline{\text{Grensen er forskjellig fra høyre og venstre side, og dermed eksisterer grensen ikke.}}}$

**b)** Bestem grenseverdien $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{2x}$.
Løsning: $x^{2x} = e^{2x\ln(x)}$. Vi bruker l'Hospital på eksponenten:

$$\lim_{x\to0^+} 2x\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2\ln(x)}{1/x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to0^+} \frac{2/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0^+} -2x = 0$$

Fordi $e^x$ er kontinuerlig er $\lim_{x\to 0^+} e^{2x\ln(x)} = e^0 = \underline{\underline{1}}$.

**c)** For hvilke verdier av $a$ og $b$ er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x \geq 1 \\ ax, & x < 1 \end{cases}$$

deriverbar for alle $x$?

Løsning: Deriverbar impliserer kontinuerlig! Det gir: $a + b + 2 = a$ (kont) og $2a + b = a$ (samme derivert). Dermed $\underline{\underline{b = -2, a = 2}}$.

## Oppgave 3

**a)** Vis ved *skjæringssetningen* (intermediate value theorem) at likningen

$$\cos(x) = x\sin(x), \quad x \in [0, \pi/2] \tag{1}$$

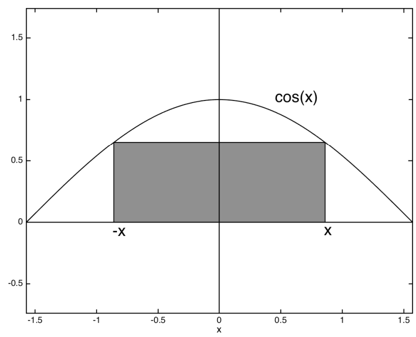
har (minst) en løsning.
Løsning: Funksjonen $f(x) = \cos(x) - x\sin(x)$ er kontinuerlig, $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = -\pi/2$. Dermed må det finnes et punkt $r$ i mellom, der $f(r) = 0$.

**b)** Vis at likningen (1) har *bare én* løsning, herved kalt $x = r$.
Løsning: $f'(x) = -x\cos(x) - 2\sin(x)$. Vi har $f'(x) < 0$ for $0 < x < \pi/2$, dermed er $f(x)$ strengt avtakende, og skjærer 0 nøyaktig i ett punkt $r$.

**c)** Finn rektangelet med størst areal som kan plasseres mellom x-aksen og buen

$$\cos(x), -\pi/2 \leq x \leq \pi/2,$$

som i figuren. Uttrykk svaret ved (det ukjente) tallet $r$ i **b)**.




Løsning: $A(x) = 2x\cos(x)$. $A'(x) = 2(\cos(x) - x\sin(x))$ har ett nullpunkt $r \in I =$

$[0, \pi/2]$. Ekstremverdier kan finnes i endepunkt, kritiske punkt og singulære punkt. $A(x)$ har ingen singulære punkt, kritisk punkt i $r$, $A(x)$ er 0 i endepunktene og positiv i de indre punktene på $I$. Dermed er $r$ det unike maksimalpunktet. Eventuelt kan brukes at $A''(x) < 0$ på intervallet for å argumentere for maksimum.
Maksimalt areal er $\underline{\underline{A(r) = 2r\cos(r) = 2r^2\sin(r)}}$.

**d)** Finn en tilnærmet løsning til (1) ved å gjøre Newton iterasjon med

$$f(x) = \cos(x) - x\sin(x),$$

start i $x_0 = 0.8$. Vi ønsker svaret med 4 korrekte siffer etter komma.

Løsning: $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n\sin(x_n)}{x_n\cos(x_n) + 2\sin(x_n)}$
gir: $0.8, 0.861655148250698, 0.860334135590490, 0.860333589019474$.
Dermed $\underline{\underline{r \approx 0.8603}}$

**e)** Likningen (1) kan skrives på formen $\tan(x) = 1/x$, som gir $x = \tan^{-1}(1/x)$.
Vis at for $g(x) = \tan^{-1}(1/x)$ så gjelder

$$|g(u) - g(v)| < |u - v| \quad \text{for alle } u, v > 0.$$

Hva sier dette om fikspunktiterasjonen $x_{n+1} = \tan^{-1}(1/x_n)$?
Løsning:

$$\cos(x) = x\sin(x) \Rightarrow \frac{1}{x} = \tan(x) \Rightarrow x = \tan^{-1}(1/x).$$

Siden $\tan(x)$ ikke har en entydig invers, må vi i inversjonen av $\tan(x)$ benytte at roten vi søker ligger mellom 0 og $\pi/2$, som er verdimengden til $\tan^{-1}(x)$ for $x > 0$.

Vi har $g'(x) = \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$. Dermed har vi $|g'(x)| < 1$ for alle $x > 0$. Middelverdisatsen (sekantsetningen) gir $|g(u) - g(v)| = |u - v| \cdot |g'(\xi)|$ for en $\xi \in (u, v)$. Dette betyr at $g(x)$ er en kontraksjon, og vi forventer at fikspunkt iterasjon konvergerer dersom vi starter tilstrekkelig nær fikspunktet. Fikspunktiterasjon konvergerer for startverdier nær fikspunktet dersom $|g'(r)| < 1$ og $g'(r)$ er kontinuerlig.

Mer presist, om vi skal bruke fikspunkt teoremet, boka s. 222, må vi finne et interval $I$ slik at $g(I) \subset I$ og vi må ha $|g(u) - g(v)| < |u - v|K$ for $0 \leq K < 1$. Det er et problem at $|g'(x)| \to 1$ når $x \to 0$, så vi må strengt tatt begrense oss vekk fra 0 for å bruke det teoremet. Hvis vi velger $I = [\epsilon, \pi/2]$ for et lite tall $\epsilon > 0$, så har vi at $|g'(x)| \leq K = 1/(1 + \epsilon^2) < 1$ for alle $x \in I$ og $g(I) \subset I$ (den siste betingelsen er oppfylt for alle $0 < \epsilon < \tan^{-1}(2/\pi) = 0.56$). Dermed er begge betingelsene oppfylt, $g(x)$ har et entydig fikspunkt $r \in I$ og fikspunktiterasjon konvergerer mot dette for alle $x_0 \in I$.

**Oppgave 4** La $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

**a)** Vis at $I = \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx = \frac{\pi}{2} + 1$.
Løsning: Substitusjon $x = 2\sin(\theta/2)$ gir $dx = \cos(\theta/2)$ og $\sqrt{4-x^2} = 2\cos(\theta/2)$. Dermed:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta/2)\cos(\theta/2)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(\theta))d\theta = \theta + \sin(\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + 1}}$$

**b)** Regn ut $S_4 \approx \int_0^{\sqrt{2}} f(x)dx$ med Simpsons regel der du bruker 4 delintervall.
Ta med minst 5 siffer i mellomregningene.
Løsning: Dette er rett fram. Jeg gjør det i Matlab:

```
x = linspace(0,sqrt(2),5);
h = sqrt(2)/4;
f = sqrt(4-x.^2);
I = sum(f.*[1 4 2 4 1])*h/3

      I = 2.570593459930071
```

(Korrekt svar: 2.570796326794897)

**c)** Vis at $f(0) = 2, f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{2}, f'''(0) = 0, f''''(0) = -\frac{3}{8}$.
Hint: vis først at $f(x)f'(x) = -x$ og bruk deretter implisitt derivasjon.
Løsning: $f'(x) = -2x/2\sqrt{4-x^2}$ gir $f(x)f'(x) = -x$. I regningen under skriver vi $f = f(x)$ etc. Jeg regner litt videre enn hva det er spurt etter, for å se systemet.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2 \\
ff' &= -x \Rightarrow f'(0) = -0/2 = 0 \\
f'f' + ff'' &= -1 \Rightarrow f''(0) = -1/f(0) = -\frac{1}{2} \\
2f'f'' + f'f'' + ff''' &= 3f'f'' + ff''' = 0 \Rightarrow f'''(0) = 0 \\
3f''f'' + 3f'f''' + f'f''' + ff'''' &= 3f''f'' + 4f'f''' + ff'''' = 0 \Rightarrow f''''(0) = -\frac{3(f''(0))^2}{f(0)} = -\frac{3}{8} \\
10f''f''' + 5f'f'''' + ff^{(v)} &= 0 \Rightarrow f^{(v)}(0) = 0 \\
10f'''f''' + 15f''f'''' + 6f'f^{(v)} + ff^{(vi)} &= 0 \Rightarrow f^{(vi)}(0) = -\frac{15f''(0)f''''(0)}{f(0)} = -\frac{45}{32}
\end{aligned}$$

'Fun fact': (Alt for vanskelig for å spørre om til eksamen): Om noen ønsker å forstå systemet her, koeffisientene er relatert til Pascals trekant, eller binomial koeffisienter (se wikipedia). Det kan videre vises at for $n > 1$ er $f^{(2n-1)}(0) = 0$ og $f^{(2n)}(0) = -\frac{(2n-3)!!\cdot(2n-1)!!}{2^{2n-1}}$, der !! betegner dobbeltfakultet: $n!! = n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\dots\cdot 1$ (slutter på 2 eller 1 om $n$ er partall eller odde). F.eks. $f^{(vi)}(0) = -\frac{3!!\cdot 5!!}{2^5} = -\frac{(3\cdot1)\cdot(5\cdot3\cdot1)}{2^5} = -\frac{45}{32}$.

**d)** Finn 4. ordens Taylor polynom til $f(x)$ i $x = 0$, kalt $p_4(x)$. Regn ut $\int_0^{\sqrt{2}} p_4(x)dx \approx I$.
Løsning:

$$p_4(x) = 2 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{x^4}{4!} = \underline{\underline{2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{64}}}$$

Dermed

$$\int_0^{\sqrt{2}} p_4(x)dx = 2x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{320}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{80}) = \underline{\underline{\sqrt{2}\,\frac{437}{240} \approx 2.575047}}$$

'Fun fact' fortsettelse: Siden vi har en formel for alle deriverte kan vi summere Taylor rekken så langt vi vil. Dette gir en formel for $\pi$:

$$\frac{\pi}{2} + 1 = \sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{6} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!\cdot(2n+1)\cdot 2^{n-1}}\right).$$

Jeg har ikke sett denne før. Om vi f.eks. tar med 20 ledd i summen (Taylor serie opp til orden 40), får vi fra dette $\pi \approx 3.1415926539$, dvs. 10 korrekte siffer.

**Oppgave 5** Løs initialverdiproblemene

**a)** $\sqrt{1-x^2}\,\frac{dy}{dx} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0.$
Løsning: Separabel likning.

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \tan^{-1}(y) = \sin^{-1}(x) + C.$$

Initialkrav gir $C = 0$. Dermed $y = \tan(\sin^{-1}(x))$. Dette må forenkles for å få full score. Ved å tegne en rettvinklet trekant med hypotenus lengde 1, kateter lengde $x$ og $\sqrt{1-x^2}$ finner vi at $\sin(\theta) = x$ gir $\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}}$$

**b)** $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = 10.$

Løsning: 1. ordens lineær likning med integrerende faktor $e^{-3t}$:

$$\frac{d}{dt}(e^{-3t}y) = e^{-3t}e^{3t} = 1 \Rightarrow y(t) = (t + C)e^{3t}.$$

Initialkrav $y(0) = C = 10$ gir løsningen

$$\underline{\underline{y(t) = (t + 10)e^{3t}}}$$

Hans Munthe-Kaas Roman Kozlov