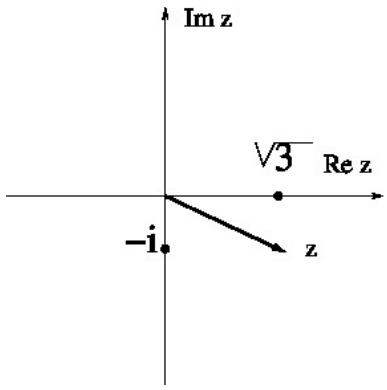
Løysingsforslag Eksamen MAT111–Grunnkurs i Matematikk I
Universitetet i Bergen, Hausten 2016

OPPGÅVE 1

Det komplekse talet $z = \sqrt{3} - i$ tilsvarar punktet eller vektoren $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z) = (\sqrt{3}, -1)$ i det komplekse planet, som ligg i 4. kvadrant. Teikna inn i det komplekse plan:



Polarforma er $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, der r er lengda på vektoren i det komplekse planet som tilsvarar z og θ er vinkelen mellom vektoren og den reelle aksen. Difor har vi

$$r^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2 = 3 + 1 = 4,$$

og

$$\tan(-\theta) = \frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

slik at $r = 2$ og $-\theta = \frac{\pi}{6}$. Altså er polarforma

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

(evt. med $\frac{11\pi}{6}$ i staden for $-\frac{\pi}{6}$), som òg kan skrivast på forma

$$z = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Dimed er, ved *de Moivres teorem*,

$$\begin{aligned} z^9 &= 2^9\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 9\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\cdot 9\right)\right) \\ &= 2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 2^9(0 + i\cdot 1) = 2^9 i = 512i \end{aligned}$$

Merknad: Her lyt ein skrive ut $\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$ for å få full pott.

OPPGÅVE 2

Gjeve $\epsilon > 0$. Lat $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{3}\}$. Då, viss

$$0 < |x-2| < \delta,$$

vil både

$$|x-2| < \frac{\epsilon}{3}, \tag{1}$$

og samstundes $|x-2| < 1$, det vil seie, $-1 < x-2 < 1$, som medfører at $1 < x < 3$, spesielt $|x| > 1$, som gjev

$$\frac{1}{|x|} < 1. \tag{2}$$

Dimed vil

$$\left|\frac{6}{x} - 3\right| = \left|\frac{6-3x}{x}\right| = \frac{3|x-2|}{|x|} = 3 \cdot \frac{1}{|x|} \cdot |x-2| \overset{(2)}{<} 3|x-2| \overset{(1)}{<} 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

som syner at $\lim_{x\to 2} \frac{6}{x} = 3$.

Merknad: Her finst sjølvsagt andre mogelege svar, til dømes $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}$.

OPPGÅVE 3

(a) Funksjonen f er per definisjon kontinuerleg viss og berre viss $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi har $f(0) = 1$ per definisjon, og

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right)}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1} = 1,$$

ved l'Hôpital sin regel i overgangen $(*)$, sidan $\lim_{x\to 0} \tan^{-1} x = \lim_{x\to 0} x = 0$, og den deriverte av nemnaren x er $\neq 0$. Dimed er $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ og f er kontinuerleg i 0.

Merknad: Nokre rekna ut båe grensene $\lim_{x\to 0^+}$ og $\lim_{x\to 0^-}$, som ikkje er naudsynt. Nokre rekna kun ut grensa utan å seie at ein lyt ha grensa lik $f(0) = 1$ for at f skal vere kontinuerleg. Det gjev trekk.

(b) Funksjonen f er per definisjon derivérbar i 0 viss og berre viss grensa

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{eksisterer.} \tag{3}$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\tan^{-1} h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan^{-1} h - h}{h^2} \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} h - h\right)}{\frac{d}{dx}(h^2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h^2} - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-(1+h^2)}{2h(1+h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{2h(1+h^2)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2(1+h^2)} = 0,
\end{aligned}$$

ved l'Hôpital sin regel i overgangen $(*)$, sidan $\lim_{h\to 0}\left(\tan^{-1} h - h\right) = \lim_{h\to 0} h^2 = 0$, og den deriverte av nemnaren h^2 er $\neq 0$ bortsett frå i 0.

Dimed er f derivérbar i 0 (med $f'(0) = 0$).

Merknad: Det var diverre ein del som hevda at for å vere derivérbar, så måtte grensa (3) ikkje berre eksistere, men òg vere *lik* den deriverte av konstanten $1 = f(0)$ som er 0. Dette er feil (og meininslaust, fordi det ikkje gjev meining å derivere ein funksjonsverdi i eitt enkelt punkt).

Alternativ: Ein kan òg rekne ut nokre av grensene ovanfor ved å nytte l'Hôpital sin regel fleire gonger i staden for å omskrive først, men utrekningane vert meir kompliserte.

OPPGÅVE 4

(a) Vi har $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ og reknar ut:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \\ f''(x) &= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} f(8) &= 8^{\frac{1}{3}} = 2, \\ f'(8) &= \frac{1}{3}8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{12}, \\ f''(8) &= -\frac{2}{9}8^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\cdot 2^5} = -\frac{1}{144}. \end{aligned}$$

Dimed er

$$P_2(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)}{2}(x-8)^2 = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

Merknad: Nokre skreiv dette ut som $-\frac{1}{288}x^2 + \frac{5}{36}x + \frac{10}{9}$, som ikkje er naudsynt.

(b) For $x > 8$, seier Taylor sin formel at

$$\sqrt[3]{x} = P_2(x) + E_2(x), \text{ der } E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-8)^3, \text{ for ein } s \in (8, x). \tag{4}$$

Vi reknar ut

$$f'''(x) = -\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27x^{\frac{8}{3}}},$$

slik at

$$E_2(x) = \frac{10}{3!\cdot 27s^{\frac{8}{3}}} = \frac{5}{81s^{\frac{8}{3}}}(x-8)^3 \text{ for ein } s \in (8, x). \tag{5}$$

Når $8 < x < 27$, vil $8 < s < 27$, slik at

$$\frac{5}{81\cdot 27^{\frac{8}{3}}} < \frac{5}{81s^{\frac{8}{3}}} < \frac{5}{81\cdot 8^{\frac{8}{3}}}$$

(sidan $\frac{1}{s^{\frac{8}{3}}}$ er avtakande for positiv s), det vil seie

$$\frac{5}{3^{12}} < \frac{5}{81s^{\frac{8}{3}}} < \frac{5}{3^4\cdot 2^8}.$$

Gongar vi med $(x-8)^3$ (som er >0, sidan $x>8$), får vi frå (5):

$$\frac{5}{3^{12}}(x-8)^3 < E_2(x) = \frac{5}{81s^{\frac{8}{3}}}(x-8)^3 < \frac{5}{3^4\cdot 2^8}(x-8)^3.$$

Adderer vi $P_2(x)$ gjev (4) oss at

$$P_2(x) + \frac{5}{3^{12}}(x-8)^3 < \sqrt[3]{x} = P_2(x) + E_2(x) < P_2(x) + \frac{5}{3^4\cdot 2^8}(x-8)^3.$$

Altså er

$$K = \frac{5}{3^{12}} = \frac{5}{531\,441} \quad \text{og} \quad L = \frac{5}{3^4\cdot 2^8} = \frac{5}{20\,736}.$$

Merknad: Dette er den optimale løysinga, og er den som gjev full pott. Det er òg mogleg å seie at $|E_2(x)| < \frac{5}{3^4\cdot 2^8}(x-8)^3 = \frac{5}{20\,736}(x-8)^3$ og dimed seie at

$$L = \frac{5}{3^4\cdot 2^8} = \frac{5}{20\,736} \quad \text{og} \quad K = -L,$$

eller (betre) observere at $E_2(x) > 0$ og seie at

$$L = \frac{5}{3^4\cdot 2^8} = \frac{5}{20\,736} \quad \text{og} \quad K = 0.$$

OPPGÅVE 5

(a) Ved derivasjonsreglane for produkt og sum av funksjonar har vi $f'(x) = [x^3]'\cdot e^{-x} + x^3\cdot[e^{-x}]' + [2]' = 3x^2\cdot e^{-x} + x^3\cdot(-e^{-x}) + 0 = x^2e^{-x}(3-x)$, som vi skulle syne.

Sidan $e^{-x}>0$, $x^2\geq 0$ or er $=0$ kun for $x=0$, gjev forteiknet til $3-x$ at $f'(x)>0$ når $x\in(-\infty,0)$ og $x\in(0,3)$ og $f'(x)<0$ når $x>3$. Dimed er f veksande på både $(-\infty,0]$ og $[0,3]$, dvs. f er veksande på $(-\infty,3]$, og f er avtakande på $[3,\infty)$.

For å finne globale maksima og minima kan ein argumentere på fleire måter:

Alternativ 1: Globale (og lokale) maksima og minima kan kun forekome i endepunkt, kritiske punkt (der $f'=0$) eller singulære punkt (der f' ikkje eksisterer) i definisjonsmengda. Det finst korkje endepunkt eller singulære punkt, og $x=0$ og $x=3$ er einaste kritiske punkt. Eventuelle globale ekstremalverdier kan difor kun forekome i $x=0$ og $x=3$. Pga. monotonieigenskapane til f er det korkje (lokalt eller globalt) maksimum eller minimum for $x=0$ (sidan f veks i intervall på båe sider av punktet). Likeleis gjev monotonieigenskapane til f at f har globalt maksimum i $x=3$. Siden det ikkje finst andre kandidatar, konkluderer vi at $f(3)=\frac{27}{e^3}+2$ er eit maksimum, og f ikkje har globale minima.

Alternativ 2: Sidan f er veksande på $(-\infty,3]$ og avtakande på $[3,\infty)$, og kontinuerleg, må f ha eit globalt maksimum $f(3)=\frac{27}{e^3}+2$ for $x=3$. Globalt minimum finst ikkje fordi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (sidan $e^{-x}\to\infty$ og $x^3\to-\infty$).

Merknad: Det var ein god del mangelfulle grunngjevingar på eksistens og ikkje-eksistens av ekstremalverdiane.

(b) Sidan f er kontinuerleg med $f(-1) = -e+2 < 0$ og $f(0) = 2 > 0$, vil det ved *skjeringssetninga* finnast eit punkt $r\in[-1,0]$ slik at $f(r)=0$. Altså har f eit nullpunkt i $[-1,0]$ (faktisk i $(-1,0)$).

Sidan f er veksande på $(-\infty, 3]$, har f kun eitt nullpunkt her. Når $x \geq 3$ (faktisk når $x \geq 0$), er det klart at $f(x) \geq 2$, slik at f har ingen nullpunkt på $[3, \infty)$. Dimed har f kun eitt nullpunkt på heile si definisjonsmengd $\mathbb{R}$.

(c) Newton sin metode med startverdi $x_0 = -1$ gir den tilnærma verdien

$$x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{(-1)^3 e^{-(-1)} + 2}{(-1)^2 e^{-(-1)}(3-(-1))} = -1 - \frac{-e+2}{e \cdot 4} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2e} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2e}$$

(som er $\approx -0,9339397$) for nullpunktet r.

Vi rekner ut

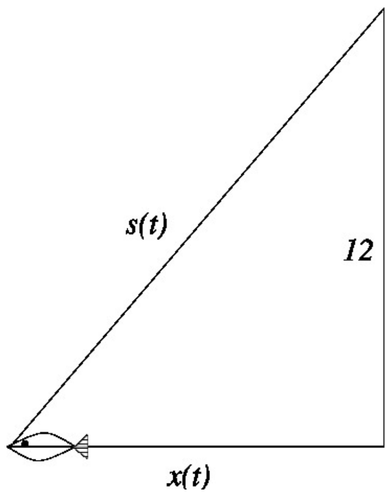
$$\begin{aligned} f''(x) &= [e^{-x}]' \cdot x^2(3-x) + e^{-x} \cdot [x^2(3-x)]' = -e^{-x} \cdot x^2(3-x) + e^{-x} \cdot [6x - 3x^2] \\ &= e^{-x}\left(-x^2(3-x) + 6x - 3x^2\right) = e^{-x}\left(x^3 - 6x^2 + 6x\right) = xe^{-x}\left(x^2 - 6x + 6\right). \end{aligned}$$

Sidan $x^2 - 6x + 6 > 0$ når $x < 0$ og $xe^{-x} < 0$ når $x < 0$, er $f''(x) < 0$ når $x < 0$. Altså er grafen til f veksande og nedoverkrumma/konkav på $(-\infty, 0]$. Tangenten i punktet $x = -1$ vil altså ligge over grafen og treffe x-aksen til venstre for punktet der grafen treff x-aksen. Sidan tangenten treff x-aksen i x_1 (det er slik Newton sin metode verkar) og grafen treff x-aksen i nullpunktet r, vil $x_1 < r$, altså er den tilnærma verdien for liten i forhold til den verkelege verdien til nullpunktet.

Merknad: Ein del rekna kun ut at $f''(-1) < 0$. Sjølv om dette er nok til å konkludere at grafen til f er konkav *i eit lite intervall om* -1, sidan f'' er kontinuerleg, så treng vi at grafen er konveks på heile intervallet $(-1, r)$ for å kunne konkludere som vi gjer.

OPPGÅVE 6

Vi lét t vere tida, $s = s(t)$ vere lengda på snella (mellom toppen av stanga og fisken) og $x = x(t)$ vere avstanden mellom punktet der fisken bit på kroken og det tenkte skjeringspunktet mellom den loddrette lina frå toppen av fiskestanga og den horisontale lina 12 meter under toppen.



Vi vil finne $s'(t)$ i det tidspunktet $s(t) = 15$ (m) når vi veit at $x'(t) = 5$ (m/s).

Ved Pythagoras er

$$x^2 + 12^2 = s^2. \tag{6}$$

Alternativ 1: *Implisitt derivasjon* med omsyn på t av likninga (6) gjev

$$2x \cdot x'(t) = 2s \cdot s'(t),$$

det vil seie

(7) $$s'(t) = \frac{x \cdot x'(t)}{s} = \frac{\sqrt{s^2 - 12^2} \cdot x'(t)}{s},$$

der vi har sett inn $x = \sqrt{s^2 - 12^2}$ frå (6).

Set vi inn $s = 15$ og $x' = 5$ i (7), får vi

$$s' = \frac{\sqrt{15^2 - 12^2} \cdot 5}{15} = 3.$$

Det spring 3 meter line ut av snella i sekundet i den gjevne augneblinken.

Alternativ 2: Vi finn $x = \sqrt{s^2 - 12^2}$ frå (6) og derivérer dette uttrykket med omsyn på t ved hjelp av *kjerneregelen*:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\sqrt{s^2 - 12^2} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{s}{\sqrt{s^2 - 12^2}} \cdot s'(t),$$

som gjev oss (7) og vi kan halde fram som ovanfor.

(Vi kan òg finne $s = \sqrt{x^2 + 12^2}$ frå (6) og derivére dette uttrykket med omsyn på t.)

Alternativ 3: Vi set $t = 0$ til å vere augneblinken vi er interessert i. Likning (6) gjev oss at $x(0) = 9$. Dette saman med $x'(t) = 5$ gjev oss eit startverdiproblem med løysing $x(t) = 5t + 9$. Frå (6) får vi

$$s(t) = \sqrt{x(t)^2 + 12^2} = \sqrt{(5t + 9)^2 + 12^2},$$

og dimed

$$s'(t) = \frac{2(5t + 9) \cdot 5}{2\sqrt{(5t + 9)^2 + 12^2}} = \frac{5(5t + 9)}{\sqrt{(5t + 9)^2 + 12^2}}.$$

Set vi inn $t = 0$, får vi det ynskjede svaret $s'(0) = \frac{5 \cdot 9}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = 3$, som ovanfor.

Alternativ 4, variant av forrige: Vi set $t = 0$ til å vere den tenkte augneblinken fisken er rett under toppen av stanga, det vil seie at $x(0) = 0$. Dette saman med $x'(t) = 5$ gjev oss eit startverdiproblem med løysing $x(t) = 5t$. Frå (6) får vi

$$s(t) = \sqrt{x(t)^2 + 12^2} = \sqrt{(5t)^2 + 12^2},$$

og dimed

(8) $$s'(t) = \frac{2 \cdot 5t \cdot 5}{2\sqrt{(5t)^2 + 12^2}} = \frac{25t}{\sqrt{(5t)^2 + 12^2}}.$$

I augneblinken vi er interessert i er $s(t) = 15$, som frå (6) gjev oss at $5t = x(t) = 9$, det vil seie $t = \frac{9}{5}$. Set vi inn dette i (8), får vi det ynskjede svaret $s'(\frac{9}{5}) = \frac{25 \cdot \frac{9}{5}}{\sqrt{(5 \cdot \frac{9}{5})^2 + 12^2}} = 3$, som ovanfor.

OPPGÅVE 7

Lat $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x (f(t) - g(t))\ dt$ som i hintet. Då er h kontinuerleg og derivérbar på $[0,1]$ med $h'(x) = f(x) - g(x)$ på $[0,1]$ ved *Fundamentalteoremet i kalkulus.*

Alternativ 1: Vi veit at

$$h(0) = \int_0^0 (f(t) - g(t)) = 0\ dt$$

ved standard eigenskapar av integral. Opplysningane vi får gjev òg at

$$h(p) = \int_0^p f(t)\ dt - \int_0^p g(t)\ dt = 0,$$

for ein $p \in (0,1)$ og

$$h(1) = \int_0^1 f(t)\ dt - \int_0^1 g(t)\ dt = 0.$$

Ved *sekantsetninga/middelverdisetninga (MVT)* eller *Rolle sitt teorem* har $h' = f - g$ eit nullpunkt både i $(0,p)$ og i $(p,1)$, altså minst to forskjellege nullpunkt i $(0,1)$. Ved *sekantsetninga* eller *Rolle sitt teorem* ein gong til, har $h'' = f' - g'$ minst eitt nullpunkt i mellom desse to nullpunkta, altså finst det eit punkt $q \in (0,1)$ slik at $h''(q) = f'(q) - g'(q) = 0$, det vil seie $f'(q) = g'(q)$.

Alternativ 2: Ved *sekantsetninga/middelverdisetninga (MVT) for integraler* finst det eit tal $c \in (0,p)$ slik at

$$0 = \int_0^p (f(t) - g(t))\,dt = (p-0)\cdot(f(c) - g(c)) = p \cdot h'(c),$$

det vil seie at $h'(c) = 0$. Likeleis finst eit tal $d \in (1,p)$ slik at

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (f(t) - g(t))\,dt - \int_0^p (f(t) - g(t))\,dt = \int_p^1 (f(t) - g(t))\,dt \\ &= (1-p)\cdot(f(d) - g(d)) = (1-p)\cdot h'(d), \end{aligned}$$

det vil seie $h'(d) = 0$. Dimed har h' eit nullpunkt både i $(0,p)$ og i $(p,1)$, og vi kan argumentere vidare som ovanfor.

OPPGÅVE 8

Alternativ 1: Vi lét $u = e^x$, slik at $du = e^x\ dx = u\ dx$, og får:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x+1}\ dx &= \int \frac{1}{u+1}\cdot\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u(u+1)}du \overset{(\dagger)}{=} \int \frac{1+u-u}{u(u+1)}du \\ &= \int \frac{1+u}{u(u+1)}du - \int \frac{u}{u(u+1)}du = \int \frac{1}{u}du - \int \frac{1}{u+1}du \\ &= \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| + C = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + C, \end{aligned}$$

der absoluttverditeiknet vert droppa sidan $\frac{e^x}{e^x+1} > 0$. (Alternativt, viss vi ikkje kjem på "trikset" i overgangen $(\dagger)$, kan vi nytte delbrøksoppspalting:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u+A}{u(u+1)},$$

som gjev at $A+B=0$ og $A=1$, det vil seie $A=1$ og $B=-1$. Altså er $\frac{1}{u(u+1)}=\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}$, som før.)

Eventuelt kan svaret òg skrivast som

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C=\ln e^x-\ln(e^x+1)+C=x-\ln(e^x+1)+C$$

eller som

$$\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C=\ln\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)+C=\ln 1-\ln(1+e^{-x})+C=-\ln(1+e^{-x})+C.$$

(Substitusjonen $u=e^x+1$ gjev omtrent same utrekning.)

Alternativ 2: Vi skriv om før vi nytter substitusjonen $u=e^x$:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}\,dx=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)\,dx=\int dx-\int\frac{e^x\,dx}{e^x+1}\\ &= x-\int\frac{du}{u+1}=x-\ln|u+1|+C=x-\ln(e^x+1)+C.\end{aligned}$$

Alternativ 3: Vi lét $u=e^{-x}$, slik at $du=-e^{-x}$ og får:

$$\int\frac{1}{e^x+1}\,dx=\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=-\int\frac{du}{1+u}=-\ln|1+u|+C=-\ln(1+e^{-x})+C.$$

(Substitusjonen $u=e^{-x}+1$ gjev omtrent same utrekning.)

Alternativ 4: Vi lét $u=\frac{1}{e^x+1}$. Då har vi $e^x=\frac{1}{u}-1=\frac{1-u}{u}$ og $e^x\,dx=-\frac{du}{u^2}$, slik at

$$dx=-\frac{du}{u^2}\cdot\frac{1}{e^x}=-\frac{du}{u^2}\cdot\frac{u}{1-u}=\frac{du}{u(u-1)}.$$

Dimed er

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{e^x+1}\,dx &= \int u\cdot\frac{du}{u(u-1)}=\int\frac{du}{u-1}=\ln|u-1|+C=\ln\left|\frac{1}{e^x+1}-1\right|+C\\ &= \ln\left|\frac{1-e^x-1}{e^x+1}\right|+C=\ln\left|\frac{-e^x}{e^x+1}\right|+C=\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)+C.\end{aligned}$$

OPPGÅVE 9

Alternativ 1: *Sylinderskalmetoden* gjev

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx=2\pi\lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^b\\ &= -\pi\lim_{b\to\infty}\Big[\frac{1}{e^{x^2}}\Big]_0^b=-\pi\lim_{b\to\infty}\Big[\frac{1}{e^{b^2}}-\frac{1}{e^0}\Big]=-\pi\Big[0-1\Big]=\pi.\end{aligned}$$

(Her har vi skrive integralet $\int xe^{-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$ utan nærare grunngjeving, sidan det kjem frå den opplagte substitusjonen $u=x^2$.)

Alternativ 2: Vi løyser $y=e^{-x^2}$ med omsyn på x og får

$$x^2=-\ln y.$$

Når $x \in [0, \infty)$ er $y \in (0, 1]$. Meir presist er $y = 1$ når $x = 0$ og $y \to 0^+$ når $x \to \infty$. *Skivemetoden* gjev volumet

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 x^2\, dy = \pi \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 (-\ln y)\; dy = \pi \lim_{c \to 0^+} [-y \ln y + y]_c^1 \\ &= \pi \lim_{c \to 0^+} [(-1 \cdot \ln 1 + 1) - (-c \ln c + c)] = \pi \lim_{c \to 0^+} [0 + 1 + c \ln c - c] \\ &= \pi \left(1 + \lim_{c \to 0^+} c \ln c\right) = \pi\,(1 + 0) = \pi. \end{aligned}$$

(Her har vi nytta at $\lim_{c \to 0^+} c \ln c = 0$ er ei "kjend" grense og at $\int \ln y\, dy = y \ln |y| + y + C$ er eit "kjend" integral.)

Merknad: Altfor mange skreiv uttrykket for volumet vi får viss vi dreier området om x-aksen, nemleg $\pi \int_0^\infty \left(e^{-x^2}\right)^2\, dx = \pi \int_0^\infty e^{-2x^2}\, dx$, som ikkje var svar på spørsmålet (og ikkje er eit integral som kan løysast utan numeriske metodar). Det var òg mange som skreiv uttrykket for arealet til området R, nemleg $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$, som heller ikkje var svar på spørsmålet, og skreiv av eksempel 8 i § 6.5 i læreboken.

OPPGÅVE 10

(a) Vi omskriv likninga som

$$y' - Ay = Bx$$

og multipliserer båe sider med den integrerande faktoren e^{-Ax} (fordi $-Ax$ er ein antiderivert til A, funksjonen som multipliserer y i likninga):

$$\begin{aligned} y'e^{-Ax} - Aye^{-Ax} &= Bxe^{-Ax} \\ \left(ye^{-Ax}\right)' &= Bxe^{-Ax} \\ ye^{-Ax} &= B \int xe^{-Ax}\, dx, \text{ eller} \qquad (9) \\ y(x) &= Be^{Ax} \int xe^{-Ax}\, dx \qquad (10) \end{aligned}$$

(det er òg tillate å skrive denne løysingsformelen direkte).

Vi løyser integralet $\int xe^{-Ax}$ ved delvis integrasjon med $U = x$ og $dV = e^{-Ax}\, dx$, slik at $dU = dx$ og $V = -\frac{1}{A} e^{-Ax}$:

$$\begin{aligned} \int xe^{-Ax} &= UV - \int V\, dU = x \cdot \left(-\frac{1}{A} e^{-Ax}\right) - \int \left(-\frac{1}{A} e^{-Ax}\right)\, dx \\ &= -\frac{1}{A} xe^{-Ax} + \frac{1}{A} \int e^{-Ax}\, dx = -\frac{1}{A} xe^{-Ax} + \frac{1}{A} \cdot \left(-\frac{1}{A} e^{-Ax}\right) + C \\ &= -\frac{1}{A} e^{-Ax} \left(x + \frac{1}{A}\right) + C. \end{aligned}$$

Frå (9) får vi difor:

$$ye^{-Ax} = -\frac{B}{A} e^{-Ax} \left(x + \frac{1}{A}\right) + C', \text{ med } C' = BC,$$

det vil seie

$$y(x) = -\frac{B}{A}\left(x + \frac{1}{A}\right) + C'e^{Ax}. \tag{11}$$

Vi har

$$y_0 = y(0) = -\frac{B}{A}\left(0 + \frac{1}{A}\right) + C'e^0 = -\frac{B}{A^2} + C',$$

som gir $C' = y_0 + \frac{B}{A^2}$. Insatt i (11) får vi løysinga

$$y(x) = -\frac{B}{A}\left(x + \frac{1}{A}\right) + \left(y_0 + \frac{B}{A^2}\right)e^{Ax}.$$

Merknad: Vi har delt på A i utrekninga ovanfor, slik at vi her måtte eigentleg gå ut frå at $A \neq 0$. Viss $A = 0$, har vi startverdiproblemet $y' = Bx$, $y(0) = y_0$, som har løysinga $y(x) = \frac{1}{2}Bx^2 + y_0$. Det vart ikkje gjeve trekk for å oversjå dette punktet (og det var ingen som la merke til det!).

(b) Vi veit at tangentlina til grafen til f i punktet (x, y) går òg gjennom $(0, x^2+(x+1)y)$, slik at i eitkvart punkt (x, y) med $x \neq 0$ har lina stigninga

$$\frac{y - \big(x^2 + (x+1)y\big)}{x - 0} = \frac{y - x^2 - xy - y}{x} = \frac{-x^2 - xy}{x} = -x - y,$$

som er lik $f'(x)$ ved definisjonen av den deriverte til f. Dimed har vi at f oppfyller differensiallikninga $f'(x) = -y - x$. Samstundes veit vi at grafen går gjennom origo, det vil seie $f(0) = 0$. Dette gjev oss same startverdiproblem som i (a) med $y = f(x)$, $A = B = -1$ og $y_0 = 0$. Frå løysinga til (a) veit vi difor at

$$f(x) = -\frac{-1}{-1}\left(x + \frac{1}{-1}\right) + \left(0 + \frac{-1}{(-1)^2}\right)e^{-x} = -(x-1) - e^{-x} = 1 - x - e^{-x}.$$

Andreas Leopold Knutsen