

UNIVERSITETET I BERGEN
 Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet
Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
 onsdag 18.mai 2016 kl. 09:00-14:00

Tillatte hjelpemidler: "R. A. Adams and C. Essex, Calculus - A Complete Course" og kalkulator i samsvar med fakultetets regler.

I sensuren vektes alle deloppgaver likt. Antall deloppgaver: 16.

OPPGAVE 1

La

$$z = -8.$$

- a) Merk av z i det komplekse planet og skriv tallet på formen $r(\cos \theta + i \sin \theta)$, med $0 \leq \theta < 2\pi$.
 b) Finn komplekse løsninger av ligningen

$$(w + 1)^3 + 8 = 0,$$

og merk av løsningene i det komplekse planet.

OPPGAVE 2

- a) Avgjør om grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ eksisterer og finn i tilfellet grenseverdien for

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}.$$

- b) Avgjør om det finnes en kontinuert utvidelse av funksjonen

$$g(x) = \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

slik at den blir kontinuert på hele x -aksen, og finn i tilfellet denne. (OBS: Den kontinuerte utvidelsen av en funksjon framkommer ved eksplisitt å definere funksjonsverdien i punkt der den opprinnelige funksjonen ikke er definert).

- c) Bruk definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{|x|} = 1.$$

- d) Avgjør om funksjonen oppgitt i c) er deriverbar for $x = 0$ ved å benytte definisjonen på den deriverte i et punkt.

OPPGAVE 3

Et fly flyr i en rett linje i en høyde på 10 km og passerer rett over en antenne. Når flyet har en avstand på 25 km fra antennen, registrerer radaren at avstanden endrer seg med 500 km/t. Med hvilken hastighet flyr flyet?

OPPGAVE 4

To kurver er gitt ved grafene til funksjonene $f(x) = -\sin(x) + x^3$ og $g(x) = 1$ for $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

- Vis at kurvene krysser hverandre en og bare en gang.
- Benytt Newtons metode med startpunkt $x_0 = 1$ til å finne en approksimasjon til punktet der kurvene krysser hverandre med tre desimalers nøyaktighet.

OPPGAVE 5

Gitt initialverdiproblemet

$$3ty' - y = \ln t + 2, \quad t > 0, \quad y(1) = -4.$$

- Uten å løse ligningen for $y(t)$, finn $y''(1)$.
- Løs initialverdiproblemet.

OPPGAVE 6

- Bestem arealet av det uendelige området begrenset av kurven $y = e^{-x}$ og x-aksen for $x > 0$.
- Uten å beregne et integral, forklar hvorfor arealet i a) er det samme som det som er begrenset av kurven $y = -\ln x$ og y-aksen for $y > 0$.
- Finn volumet av området som oppstår ved å rotere området i a) om y-aksen.

OPPGAVE 7

- Bestem verdien av integralet

$$\int_0^1 \frac{z+1}{\sqrt{z^2+2z}} dz.$$

- Finn $y'(x)$ for

$$y(x) = \int_1^{x^3} 3t \cos t dt.$$