Løsningsforslag

Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I
torsdag 18.mai 2016 kl. 09:00-14:00

OPPGAVE 1

La

$$z = -8.$$

a) Merk av z i det komplekse planet og skriv tallet på formen $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, med $0 \le \theta < 2\pi$.

Løsning:

$$|z| = \sqrt{(-8)^2} = 8.$$

$$\mathrm{Arg}(-8) = \tan^{-1}\frac{0}{-8} = \pi$$

$$z = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$$

b) Finn komplekse løsninger av ligningen

$$(w+1)^3 + 8 = 0,$$

og merk av løsningene i det komplekse planet.

Løsning:

$$(w_k+1)^3 = 8(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$$
$$w_k + 1 = 2(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))^{\frac{1}{3}}$$
$$w_k + 1 = 2\left(\cos\frac{1}{3}(\pi + 2k\pi) + i\sin\frac{1}{3}(\pi + 2k\pi)\right)$$

De enkelte røttene finnes ved å sette k=0,1,2:

$$w_1 + 1 = 2\left(\cos\frac{1}{3}(\pi) + i\sin\frac{1}{3}(\pi)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$
$$w_2 + 1 = 2\left(\cos\frac{1}{3}(\pi + 2\pi) + i\sin\frac{1}{3}(\pi + 2\pi)\right) = 2(-1) = -2,$$
$$w_3 + 1 = 2\left(\cos\frac{1}{3}(\pi + 4\pi) + i\sin\frac{1}{3}(\pi + 4\pi)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3},$$

som gir løsningene $w_1 = i\sqrt{3}, w_2 = -3, w_3 = -i\sqrt{3}$.

OPPGAVE 2

a) Avgjør om grenseverdien $\lim_{x\to 2} f(x)$ eksisterer og finn i tilfellet grenseverdien for

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}.$$

Løsning:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{3x^2-4x}=\frac{1}{4}$$

b) Avgjør om det finnes en kontinuerlig utvidelse av funksjonen

$$g(x)=\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$$

slik at den blir kontinuerlig på hele x-aksen, og finn i tilfellet denne. (OBS: Den kontinuerlige utvidelsen av en funksjon framkommer ved eksplisitt å definere funksjonsverdien for punkt der den opprinnelige funksjonen ikke er definert).

Løsning:

Funksjonen er kontinuerlig overalt bortsett fra muligens i $x=\frac{\pi}{2}$. Undersøker grenseverdi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{1}=-1.$$

Den kontinuerlige utvidelsen kan defineres som

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, & x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ -1, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

c) Bruk definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{|x|}\right)=1.$$

Løsning:

Gitt $\epsilon>0$. Skal finne $\delta>0$, s.a $|x-0|<\delta\Rightarrow\left|\left(1+\sqrt{|x|}\right)-1\right|<\epsilon$. Vi har

$$\left|\left(1+\sqrt{|x|}\right)-1\right|=|x|^{\frac{1}{2}}<\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Velger $\delta=\epsilon^2$. Det gir $\left|\left(1+\sqrt{|x|}\right)-1\right|<(\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}=\epsilon$.

d) Avgjør om funksjonen oppgitt i c) er deriverbar for $x=0$ ved å benytte definisjonen på den deriverte i et punkt.

Løsning:

Den deriverte av $f(x)=1+\sqrt{|x|}$ for $x=0$ er gitt ved

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+\sqrt{|h|}-(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h}=\pm\infty.$$

Siden grensen ikke eksisterer er ikke funksjonen deriverbar for $x=0$.

OPPGAVE 3

Et fly flyr i en rett linje i en høyde på 10 km og passerer rett over en antenne. Når flyet har en avstand på 25 km fra antennen, registrerer radaren at avstanden endrer seg med 500 km/t. Med hvilken hastighet flyr flyet?

Løsning:

Avstanden flyet har fløyet siden det passerte over antennen er $s(t)$, mens avstanden mellom flyet og antennen er $d(t)$. Det gir

$$s(t)^2 + 10^2 = d(t)^2.$$

Hastigheten til flyet er s'(t). Denne kan f.eks finnes ved implisitt derivasjon

$$2ss'(t) = 2d(t)d'(t)$$

$$s'(t) = \frac{d(t)d'(t)}{s}$$

Som gir

$$s'(t)_{d(t)=25} = \frac{25 \cdot 500}{\sqrt{25^2 - 10^2}} \text{km/t} \approx 546 \text{ km/t}.$$

OPPGAVE 4

To kurver er gitt ved grafene til funksjonene $f(x) = -\sin(x) + x^3$ og $g(x) = 1$ for $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

a) Vis at kurvene krysser hverandre en og bare en gang.

Løsning:

$$f(1) = -\sin(1) + 1^3 < 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^3 > -1 + \frac{27}{8} > 1$$

Siden f(x) er kontinuerlig har vi fra mellomverditeoremet at kurvene krysser hverandre. I tillegg har vi

$$f'(x) = -\cos(x) + 3x^2 > -1 + 3x^2 > 0 \text{ for } 1 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Dette betyr at funksjonen er voksende på intervallet, slik at det eksisterer ett og bare ett punkt der $f(x)$ krysser linjen y=1.

b) Benytt Newtons metode med startpunkt $x_0 = 1$ til å finne en approksimasjon til punktet der kurvene krysser hverandre med 3 desimalers nøyaktighet.

Løsning:

Skal approksimere løsningen av ligningen $h(x) = f(x) - g(x) = -\sin(x) + x^3 - 1 = 0$. Vi har $h'(x) = -\cos(x) + 3x^2$. Newtons metode gir:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = 1 - \frac{-\sin(x_0) + x_o^3 - 1}{-\cos(x_0) + 3x_0^2} \approx 1{,}3421$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} = x_1 - \frac{-\sin(x_1) + x_1^3 - 1}{-\cos(x_1) + 3x_1^2} \approx 1{,}2564$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} = x_2 - \frac{-\sin(x_2) + x_2^3 - 1}{-\cos(x_2) + 3x_2^2} \approx 1{,}2491$$

$$x_4 = x_3 - \frac{h(x_3)}{h'(x_3)} = x_3 - \frac{-\sin(x_3) + x_3^3 - 1}{-\cos(x_3) + 3x_3^2} \approx 1{,}2491$$

OPPGAVE 5

Gitt initialverdiproblemet

$$3ty' - y = \ln t + 2, \qquad t > 0, \qquad y(1) = -4.$$

a) Uten å løse ligningen for $y(t)$, finn $y''(1)$.

<u>Løsning:</u>

Implisitt derivasjon med hensyn på t gir

$$3y' + 3ty'' - y' = \frac{1}{t},$$
$$y'' = \frac{1}{3t^2} - \frac{2y'}{3t}.$$

Finner $y'(1)$ ved innsetting

$$3 \cdot 1 \cdot y'(1) - (-4) = \ln 1 + 2,$$
$$y'(1) = -\frac{2}{3}.$$

Innsatt i uttrykket for y'' får vi

$$y''(1) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{9}.$$

b) Løs initialverdiproblemet.

<u>Løsning:</u>

Dette er en første ordens ligning som kan løses ved hjelp av integrerende faktor

$$I(x) = e^{\int -\frac{1}{3t}dt} = e^{-\frac{1}{3}\ln t} = t^{-\frac{1}{3}}.$$

Multiplikasjon med integrerende faktor gir

$$t^{-\frac{1}{3}}y' - \frac{1}{3}yt^{-\frac{4}{3}} = \frac{t^{-\frac{4}{3}}}{3}\ln t + \frac{2t^{-\frac{4}{3}}}{3}$$
$$\left[t^{-\frac{1}{3}}y\right]' = \frac{1}{3}t^{-\frac{4}{3}}\ln t + \frac{2}{3}t^{-\frac{4}{3}}$$
$$t^{-\frac{1}{3}}y = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}\ln t\, dt + \frac{2}{3}\int t^{-\frac{4}{3}}dt$$
$$= -t^{-\frac{1}{3}}\ln t + \int t^{-\frac{4}{3}}\, dt - 2t^{-\frac{1}{3}} + C$$
$$= -5t^{-\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}\ln t + C$$
$$y(t) = -5 - \ln t + Ct^{\frac{1}{3}}$$

Innsatt for initialbetingelsen får vi

$$-4 = -5 + C \;\Rightarrow C = 1,$$

som gir løsningen

$$y(t) = -5 + t^{\frac{1}{3}} - \ln t.$$

OPPGAVE 6

a) Bestem arealet av det uendelige området begrenset av kurven $y = e^{-x}$ og x-aksen for $x > 0$.

Løsning:

$$A = \int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty} -e^{-x}|_0^a = -\lim_{a\to\infty} e^{-a} + 1 = 1.$$

b) Uten å beregne et integral, forklar hvorfor arealet i a) er det samme som det som er begrenset av kurven $y = -\ln x$ og y-aksen for $y > 0$.

Løsning:

Siden $f(x) = e^{-x}$ er strengt avtagende for $x > 0$, så har $f(x)$ en invers funksjon. Viser at $f^{-1}(x) = -\ln x$.

$$y = e^{-x}$$
$$\ln y = -x$$
$$x = -\ln y$$

Det betyr at $f^{-1}(x) = -\ln x$. Siden en funksjon og dens invers er symmetrisk om linjen $y = x$, så vil de to aktuelle områdene være symmetriske om denne linjen og arealene må være like.

c) Finn volumet av området som oppstår ved å rotere arealet i a) om y-aksen.

Løsning:

Betrakter området som sammensatt av sylinderskall med infinitesimal bredde dx. Høyden på et sylinderskall med radius x er $h(x) = e^{-x}$, og omkretsen er $2\pi r(x)$, der $r(x) = x$, siden området roteres om y-aksen, som da blir senter i sylinderen. Volumet blir

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\infty 2\pi x e^{-x}\,dx \\ &= 2\pi \lim_{a\to\infty}\int_0^a x e^{-x}dx \\ &= 2\pi \lim_{a\to\infty}\left[-xe^{-x}|_0^a + \int_0^a e^{-x}dx\right] \\ &= 2\pi \lim_{a\to\infty}[-ae^{-a} - e^{-x}]_0^a] \\ &= 2\pi \lim_{a\to\infty}[-ae^{-a} - e^{-a} + 1] = 2\pi. \end{aligned}$$

OPPGAVE 7

a) Bestem verdien av integralet

$$\int_0^1 \frac{z+1}{\sqrt{z^2+2z}}dz.$$

Løsning:

$$\int_0^1 \frac{z+1}{\sqrt{z^2+2z}}dz = \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \sqrt{u}\Big|_0^3 = \sqrt{3}$$

b) Finn $y'(x)$ for

$$y(x) = \int_1^{x^3} 3t\cos t\,dt.$$

Løsning:
Lar $u(x) = x^3$. Det gir

$$\begin{aligned} y(x) &= y\big(u(x)\big) \\ &= \int_1^{u(x)} 3t \cos t \, dt \,, \\ y'(x) &= u'(x) y'(u) \\ &= u'(x) 3u(x) \cos u(x) \\ &= 3x^2 3x^3 \cos x^3 \ = 9x^5 \cos x^3. \end{aligned}$$

En alternativ løsning er å regne ut integralet og deretter derivere løsningen.

Inga Berre