NYNORSK

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitskaplege fakultet

Eksamen i emnet MAT111 – Grunnkurs i Matematikk I

Onsdag 13. desember 2017, kl. 09–14

Tillatne hjelpemiddel: Lærebok ("Calculus - a complete course" av R. A. Adams og C. Essex, 8. eller 7. utgåve, eller tidlegare utgåver av R. A. Adams) og kalkulator, i samsvar med fakultetet sine reglar.

Oppgåvesettet er på 3 sider (med oppgåvene 1–10) og er samansett av 13 deloppgåver som alle tel likt ved sensurering (til dømes tel oppgåve 1 like mykje som oppgåve 5a).

Les nøye gjennom oppgåvesettet. Alle svar skal grunngjevast, men grunngjevingane skal vere korte. Det må vere med nok mellomrekning til at framgangsmåten går tydeleg fram av det du skriv. Det vert gjeve godt med poeng for riktig framgangsmåte, sjølv om du ikkje kjem fram til korrekt svar.

English translation follows on page 4.

OPPGÅVE 1

Teikn inn det komplekse talet $-1+i$ i det komplekse plan, skriv det på polarform og rekn ut $(-1+i)^{10}$.

OPPGÅVE 2

Nytt den formelle definisjonen av grenseverdi ("$\epsilon - \delta$-definisjonen") til å syne at

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+4x-3\right)=2.$$

OPPGÅVE 3

Finn konstanten c slik at funksjonen

$$f(x)=\begin{cases}(\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), & x\in(0,1)\cup(1,\infty);\\ c, & x=1\end{cases}$$

vert kontinuerleg i 1.

OPPGÅVE 4

Grunngje at funksjonen

$$f(x) = e^{\tan^{-1} x} + x^3,\ x \in \mathbb{R},$$

har ein invers funksjon f^{-1} og finn den deriverte $\left(f^{-1}\right)'(1)$. (Hint: Rekn ut $f(0)$.)

OPPGÅVE 5

Likninga

$$e^{2y} \sin x + 1 + y = 2x \cos(\pi y)$$

skildrar ei kurve C i planet.

(a) Syn at kurva C går gjennom punktet $(x, y) = (0, -1)$ og finn likninga for tangentlina til C i dette punktet.

(b) Syn at kurva C skjer x-aksa i nøyaktig eitt punkt. (Du skal ikkje finne sjølve punktet!)

OPPGÅVE 6

Du treng å vite $\ln 2$ og har ikkje kalkulator tilgjengeleg. (Du kan likevel nytte kalkulator til denne oppgåva, til dømes til å omrekne brøkar til desimaltall, men ikkje nytt logaritmefunksjonen på kalkulatoren.)

(a) Skriv $\ln 2$ som eit bestemd integral av funksjonen $\frac{1}{x}$ og nytt så trapésmetoden med to delintervall og feilestimatet for metoden til å gje eit minst mogleg intervall der $\ln 2$ ligg.

(b) Nytt Taylorpolynomet til $\ln x$ av orden 2 om punktet 1 og Taylor sitt teorem/Taylor sin formel til å gje eit minst mogleg intervall der $\ln 2$ ligg.

(Merk at intervalla du kjem fram til i (a) og (b) kan vere forskjellige.)

OPPGÅVE 7

Finn arealet av området i planet avgrensa av kurvene $y = x$ og $y = x \sin x$ mellom deira skjeringspunkt $(0, 0)$ og $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

OPPGÅVE 8

Løys startverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2,\quad y(0) = 5.$$

(Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

OPPGÅVE 9

Eit kar av høgd H (meter) har form som omdreiingsleikamen som framkjem ved å dreie området i planet avgrensa av

$$y = 0, \quad y = H, \quad x = 0, \quad x = f(y)$$

om y-aksa. Her er f ein kontinuerleg (reell) funksjon definert på intervallet $[0, H]$ og som er positiv på intervallet $(0, H)$.

Karet er fylt med vatn, som lék gjennom eit lite hol i botnen. *Torricelli si lov* seier at volumendringa av vatn per tidseining til eikvar tid er proporsjonal med kvadratrota av vannhøgda midt i karet.

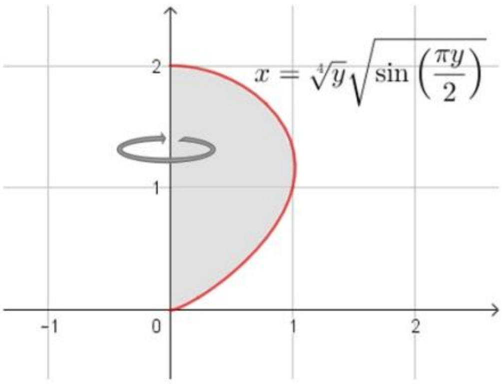
(a) Lat h vere vannhøgda midt i karet. Uttrykk volumet av vatn i karet som eit bestemd integral og nytt dette til å syne at h oppfyller differensiallikninga

$$f(h)^2\, h'(t) = -K\sqrt{h},$$

for ein positiv konstant $K \in \mathbb{R}$, med omsyn på tida t. **(Du kan nytte dette resultatet vidare i neste delspørsmål sjølv om du ikkje får til å syne dette.)**

(b) Gå ut frå at $H = 2$ (meter) og $f(y) = \sqrt[4]{y}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}$, som synt i figuren nedanfor, der området som vert rotert om y-aksa er teikna i grått.

Viss karet er fullt i utgangspunktet og vannhøgda er $h = 1$ (meter) etter 1 time, kor lang tid ték det før karet er tomt? (Hint: byrj med å løyse differensiallikninga frå (a).)



OPPGÅVE 10

Lat f vere ein (reell) funksjon som er definert i eit ope intervall (a, b), og derivérbar i intervalla (a, c) og (c, b) for ein $c \in (a, b)$. Gå ut frå at f er kontinuerleg i c og at grensa $\lim_{x \to c} f'(x)$ eksisterer.

Syn at då er f derivérbar i c og at f' er kontinuerleg i c.

LUKKE TIL!

Andreas Leopold Knutsen   Shirin Fallahi   Manuel Borregales Reveron   Per Manne

English translation of Exam in MAT111 – Autumn 2017

Warning: The following translation for the examination in MAT111 is not an official one. Thus, complaints cannot be made on the basis of possible errors in this text.

Aids permitted: Textbook ("Calculus - a complete course" by R. A. Adams and C. Essex, 8th or 7th edition, or earlier editions by R. A. Adams) and calculator, according to the rules of the faculty.

The problem set consists of 3 pages (with problems 1–10) and consists of 13 subproblems that all count equally (for instance: problem 1 counts as much as problem 5a).

Read the problem set thoroughly. Give reasons for all your answers, but in a short and concise way. You should include enough calculations to make your methods transparent. Credits will be given for correct methods, even if you do not reach a correct answer.

PROBLEM 1

Draw the complex number $-1+i$ in the complex plane, write it in polar form and compute $(-1+i)^{10}$.

PROBLEM 2

Use the formal definition of limit (the "$\epsilon - \delta$-definition") to prove that

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+4x-3\right)=2.$$

PROBLEM 3

Find the constant c so that the function

$$f(x)=\begin{cases}(\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right), & x\in(0,1)\cup(1,\infty);\\ c, & x=1\end{cases}$$

becomes continuous in 1.

PROBLEM 4

Justify that the function

$$f(x) = e^{\tan^{-1} x} + x^3, \ x \in \mathbb{R},$$

has an inverse function f^{-1} and find the derivative $\left(f^{-1}\right)'(1)$. (Hint: Compute $f(0)$.)

PROBLEM 5

The equation

$$e^{2y} \sin x + 1 + y = 2x \cos(\pi y)$$

describes a curve C in the plane.

(a) Show that the curve C passes through the point $(x, y) = (0, -1)$ and find the equation of the tangent line to C in this point.

(b) Show that the curve C intersects the x-axis in precisely one point. (You are not supposed to find the actual point!)

PROBLEM 6

You need to know $\ln 2$ and do not have a calculator available. (You may still use a calculator for this excercise, for instance to write fractions as decimals, but do not use the logarithmic function on the calculator.)

(a) Write $\ln 2$ as a definite integral of the function $\frac{1}{x}$ and then use the trapezoidal rule with two subintervals and the error estimate for the method to give a smallest possible interval where $\ln 2$ belongs.

(b) Use the Taylor polynomial of $\ln x$ of order 2 about the point 1 and Taylor's theorem/Taylor's formula to give a smallest possible interval where $\ln 2$ belongs.

(Note that the intervals you find in (a) and (b) may be different.)

PROBLEM 7

Find the area of the plane region bounded by the curves $y = x$ and $y = x \sin x$ between their intersection points $(0, 0)$ and $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(Integrals in the computation should be solved by means of fundamental integration techniques, not by looking into the cover of the textbook.)

PROBLEM 8

Solve the initial value problem

$$\frac{dy}{dx} + x^2 y = x^2, \ \ y(0) = 5.$$

(Integrals in the computation should be solved by means of fundamental integration techniques, not by looking into the cover of the textbook.)

PROBLEM 9

A tank of height H (metres) is formed as the solid of revolution obtained by rotating the area in the plane bounded by

$$y = 0, \quad y = H, \quad x = 0, \quad x = f(y)$$

about the y-axis. Here f is a (real valued) continuous function defined on the interval $[0, H]$ and that is positive on the interval $(0, H)$.

The tank is filled with water, that leaks through a small hole at the bottom. *Torricelli's law* states that the rate of change of the volume of the water per unit of time is at any time proportional to the square root of the height of the water in the middle of the tank.

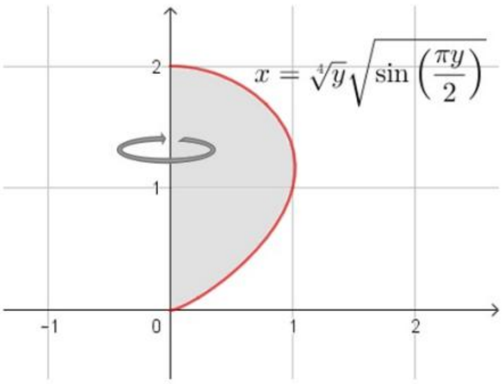
(a) Let h be the height of the water in the middle of the tank. Express the volume of water in the tank as a definite integral and use this to show that h fulfills the differential equation

$$f(h)^2\, h'(t) = -K\sqrt{h},$$

for a positive constant $K \in \mathbb{R}$, with respect to the time t. **(You may use this result in the next subproblem even if you do not manage to show this.)**

(b) Assume that $H = 2$ (metres) and $f(y) = \sqrt[4]{y}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}$, as shown in the figure below, where the region that is rotated about the y-axis is drawn in grey.

If the tank is full in the beginning and the height of water is $h = 1$ (metres) after 1 hour, how long does it take before the tank is empty? (Hint: start by solving the differential equation from (a).)



PROBLEM 10

Let f be a (real valued) function that is defined on an open interval (a, b), and differentiable in the intervals (a, c) and (c, b) for some $c \in (a, b)$. Assume that f is continuous in c and that the limit $\lim_{x \to c} f'(x)$ exists.

Show that f is then differentiable in c and that f' is continuous in c.

GOOD LUCK!

Andreas Leopold Knutsen   Shirin Fallahi   Manuel Borregales Reveron   Per Manne