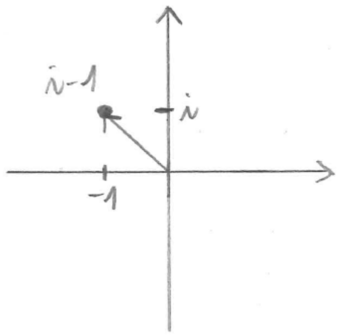
Løysingsforslag Eksamen MAT111–Grunnkurs i Matematikk I
Universitetet i Bergen, Hausten 2017

OPPGÅVE 1

Det komplekse talet $i-1$ har reell del -1 og imaginær del 1 og tilsvarar dimed punktet eller vektoren $(-1,1)$ i det komplekse planet, som ligg i 3. kvadrant. Teikna inn i det komplekse plan:



Polarformen er $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, der r er lengda på vektoren i det komplekse planet som tilsvarar $i-1$ og θ er vinkelen mellom vektoren og den reelle aksen. Difor har vi $r=\sqrt{2}$ og $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Altså er

$$i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

som òg kan skrivast på formen

$$i-1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Dimed er

$$\begin{aligned}
(i-1)^{10} &= \sqrt{2}^{10}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 10\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 10\right)\right)\\
&= 2^5\left(\cos\left(\frac{15\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{2}\right)\right)\\
&= 2^5\left(\cos\left(4\cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 2^5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= 2^5\left(0 - i\cdot 1\right) = -2^5 i = -32i
\end{aligned}$$

OPPGÅVE 2

Gjeve $\epsilon > 0$. Skal finne $\delta > 0$ slik at

$$(*) \quad \left|\left(x^2+4x-3\right)-2\right| < \epsilon \ \text{ når } \ 0<|x-1|<\delta.$$

Lat $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$. Då, viss

$$0 < |x-1| < \delta,$$

vil både

$$(1) \qquad |x-1| < \frac{\epsilon}{7},$$

og samstundes $|x-1| < 1$, det vil seie, $-1 < x-1 < 1$, som medfører at $5 < x+5 < 7$, spesielt

$$(2) \qquad |x+5| < 7.$$

Dimed vil

$$\left|x^2+4x-3-2\right| = |x-1|\,|x+5| \overset{(2)}{<} |x-1|\cdot 7 \overset{(1)}{<} \frac{\epsilon}{7}\cdot 7 = \epsilon,$$

som syner at $(*)$ er oppfylt.

OPPGÅVE 3

Funksjonen f er per definisjon kontinuerleg i 1 viss og berre viss $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$, det vil seie viss og berre viss $c = \lim_{x\to 1} f(x)$. For å rekne ut grensa nyttar vi *skviseteoremet*: vi har

$$\left|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \le 1 \ \text{ for } \ x \neq 1$$

og dimed, ved å multiplisere med $|\ln x|$:

$$|\ln x| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\right| \le |\ln x| \ \text{ for } \ x \in (0,1)\cup(1,\infty),$$

som gjev oss

$$-|\ln x| \le (\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \le |\ln x| \ \text{ for } \ x \in (0,1)\cup(1,\infty),$$

Sidan $\lim_{x\to 1} |\ln x| = 0$, gjev *skviseteoremet* oss at

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0.$$

Dimed må $c = 0$.

Merknad: Vi kunne òg starta med

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \le 1 \ \text{ for } \ x \neq 1$$

og multiplisert med $\ln x$. Då måtte vi hugsa på å snu ulikskapane når $\ln x < 0$, det vil seie når $x \in (0,1)$, og vi ville fått dei to tilfella:

$$-\ln x \le (\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \le \ln x \ \text{ for } \ x \in (1,\infty)$$

og

$$-\ln x \geq (\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) \geq \ln x \quad \text{for} \quad x \in (0,1),$$

og *skviseteoremet* ville gjeve oss $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$ og $\lim\limits_{x\to 1^-}(\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$, som igjen ville gjeve oss $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$.

OPPGÅVE 4

For å grunngje at f har ein invers funksjon, syner vi at f er ein-til-ein.

Vi har

$$f'(x) = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx}\tan^{-1} x + 3x^2 = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{1}{x^2+1} + 3x^2,$$

som syner at $f'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Dimed er f *strengt vaksande*, og dimed ein-til-ein, for viss $x_1 < x_2$, då er $f(x_1) < f(x_2)$, og spesielt er då $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Alternativt syner *Rolle sitt teorem* direkte at f er ein-til-ein, for viss $f(x_1) = f(x_2)$ og $x_1 \neq x_2$, seier teoremet at det finst ein c mellom x_1 og x_2 slik at $f'(c) = 0$, som er ein motsetnad.

Sidan $f(0) = e^{\tan^{-1} 0} + 0^3 = e^0 + 0 = 1$, er $f^{-1}(1) = 0$. Vi har

$$f'(0) = e^{\tan^{-1} 0} \cdot \frac{1}{0+1} + 0 = 1.$$

Dimed er

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Merknad: I siste line nytta vi formelen i boks

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

frå §3.1 i læreboka. Vi kunne òg utleie han for funksjonen i oppgåva:

$$y = f^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = f(y) = e^{\tan^{-1} y} + y^3,$$

og deriverer vi båe sider med omsyn på x, får vi:

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\frac{e^{\tan^{-1} y}}{y^2+1} + 3y^2\right) \cdot \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{e^{\tan^{-1} y}}{y^2+1} + 3y^2} \\
(f^{-1})'(1) &= \frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{1}{\frac{e^{\tan^{-1} y}}{y^2+1} + 3y^2}\Big|_{y=0} = \frac{1}{\frac{e^0}{0^2+1} + 3\cdot 0^2} = 1.
\end{aligned}$$

OPPGÅVE 5

(a) Kurva C går gjennom punktet $(x, y) = (0, -1)$, fordi likninga er oppfylt for $x = 0$ og $y = -1$: venstresida er nemleg lik $e^{-2} \sin 0 + 1 + (-1) = 0$ og høgresida er lik $2 \cdot 0 \cdot \cos(-\pi) = 0$.

Vi deriverer båe sidene av likninga med omsyn på x og omhandlar y som ein funksjon av x lokalt rundt eitkvart punkt. (Vi går ut frå at likninga nær eitkvart punkt (x, y) definerer y implisitt som ein *derivérbar* funksjon av x.)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{2y}\sin x + 1 + y\right) &= \frac{d}{dx}\left(2x\cos(\pi y)\right) \\
\frac{d}{dx}\left(e^{2y}\right)\cdot\sin x + e^{2y}\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(1+y) &= \frac{d}{dx}(2x)\cdot\cos(\pi y) + 2x\frac{d}{dx}\left(\cos(\pi y)\right) \qquad (\sharp) \\
\frac{d}{dy}\left(e^{2y}\right)\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\sin x + e^{2y}\cdot\cos x + \frac{dy}{dx} &= 2\cos(\pi y) + 2x\cdot\frac{d}{dy}\left(\cos(\pi y)\right)\cdot\frac{dy}{dx} \\
2e^{2y}\sin x\frac{dy}{dx} + e^{2y}\cos x + \frac{dy}{dx} &= 2\cos(\pi y) + 2x\left(-\sin(\pi y)\right)\cdot\pi\cdot\frac{dy}{dx} \\
2e^{2y}\sin x\frac{dy}{dx} + e^{2y}\cos x + \frac{dy}{dx} &= 2\cos(\pi y) - 2\pi x\sin(\pi y)\frac{dy}{dx}
\end{aligned}$$

Vi set inn $x = 0$ og $y = -1$ og får:

$$0 \cdot y'(0) + e^{-2} + y'(0) = -2 + 0 \cdot y'(0),$$

det vil seie

$$y'(0) = -(2 + e^{-2}) = -\left(2 + \frac{1}{e^2}\right),$$

som er stigninga til tangentlina til kurva i punktet $(0, -1)$. (Merk at vi òg kunne setje inn $x = 0, y = -1$ allereie i likninga $(\sharp)$, som ville gjere utrekninga kjappare, sidan første ledd til venstre og siste ledd til høgre vert 0.) Likninga for tangentlina er dimed

$$\begin{aligned}
y - (-1) &= y'(0)\,(x - 0) \\
y + 1 &= -\left(2 + \frac{1}{e^2}\right)x
\end{aligned}$$

(b) Kurva skjer x-aksa i punkt som oppfyller likninga for $y = 0$. Set vi inn $y = 0$ i likninga, får vi:

$$e^0 \sin x + 1 + 0 = 2x\cos(0)$$

det vil seie

$$\sin x + 1 - 2x = 0.$$

Løysingane til denne likninga tilsvarar nullpunkta til funksjonen

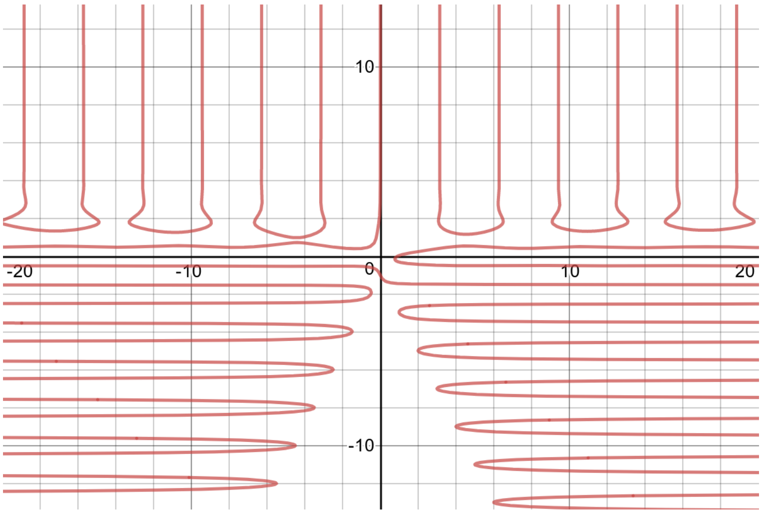
$$f(x) = \sin x + 1 - 2x.$$

Sidan $f(0) = 1 > 0$ og $f(1) = \sin 1 + 1 - 2 = \sin 1 - 1 < 1 - 1 = 0$, og f er *kontinuerleg*, har f eit nullpunkt i intervallet $(0, 1)$ ved *skjeringssetninga*. (Vi treng ikkje nytte $x = 1$, men vi ser lett at f blir negativ for stor nok x sidan $\sin x + 1 \leq 2$ og $2x \to \infty$.)

Sidan $f'(x) = \cos x - 2 < 0$ for alle x, har f høgst eitt nullpunkt. Anten kan dette grunngjevast med at f er strengt avtakande på grunn av negativ derivert (på heile definisjonsmengda, som er eit intervall), eller ved *Rolle sitt teorem* direkte, som seier at viss f hadde hatt to nullpunkt, ville vi hatt minst eitt punkt i mellom nullpunkta der den deriverte til f var null.

Vi har synt at f har eitt og berre eitt nullpunkt. Vi har dimed synt at kurva C skjer x-aksa i nøyaktig eitt punkt, og at dette punktet ligg mellom $x = 0$ og $x = 1$.

PS: Her er, for dei nyfikne, ei teikning av kurva C i planet. Kurva har eitt skjeringspunkt med y-aksa, nemleg punktet $(0, -1)$ frå (a), og eitt skjeringspunkt med x-aksa, som ein skulle syne i (b).



OPPGÅVE 6

(a) Vi har per definisjon at

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx.$$

Trapésmetoden med to delintervall av lik breidd $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ og $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ gjev tilnærminga $\ln 2 \approx T_2$, der T_2 er summen av areala til dei to trapesa definert av dei rette linene gjennom endepunkta til grafen til $\frac{1}{x}$ på kvart av delintervalla. Dei to trapesa har dimed to parallelle sider av lengd 1 og $\frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$, høvesvis $\frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$ og $\frac{1}{2}$, i avstand $\frac{1}{2}$ frå kvarandre. Dette gjev at

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{17}{24}.$$

Sidan $\frac{1}{x}$ er konkav, vil summen av arealet til dei to trapesa vere litt større enn den verkelege verdien til det bestemte integralet. Dimed er $\ln 2 < \frac{17}{24}$.

Samstundes er $\left|\left(\frac{1}{x}\right)''\right| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq 2$ på $[1, 2]$, slik at teoremet for feilestimat ved trapésmetoden gjev at

$$|\ln 2 - T_2| = \left|\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx - T_2\right| \leq \frac{2 \cdot (2-1)^3}{12 \cdot 2^2} = \frac{1}{24}.$$

Dette gjev at

$$\ln 2 \in \left[\frac{17}{24} - \frac{1}{24}, \frac{17}{24}\right) = \left[\frac{2}{3}, \frac{17}{24}\right).$$

(b) Vi set $f(x) = \ln x$. *Taylor sitt teorem* seier at

(3) $$f(x) = P_2(x) + E_2(x),$$

der

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

er Taylorpolynomet til $f(x) = \ln x$ av orden 2 om punktet 1 og

$$E_2(x) = \frac{f'''(s)}{3!}(x-1)^3, \text{ for ein } s \text{ mellom 1 og } x.$$

Vi har

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Dimed er

$$P_2(x) = \ln 1 + \frac{1}{1}(x-1) + \frac{-1/1^2}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

og

$$E_2(x) = \frac{2/s^3}{6}(x-1)^3 = \frac{1}{3s^3}(x-1)^3, \text{ for ein } s \text{ mellom 1 og } x.$$

Frå (3) får vi

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3s^3}(x-1)^3, \text{ for ein } s \text{ mellom 1 og } x.$$

Set vi inn $x = 2$ får vi

$$\ln 2 = (2-1) - \frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{1}{3s^3}(2-1)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3s^3}, \text{ for ein } s \in (1,2).$$

Når $s \in (1,2)$, vil

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{3 \cdot 2^3} < \frac{1}{3s^3} < \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{1}{3}.$$

Dimed er

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{24} < \ln 2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

det vil seie

$$\ln 2 \in \left(\frac{13}{24}, \frac{5}{6}\right).$$

OPPGÅVE 7

Vi har $x \geq x \sin x$ når $x \geq 0$ (sidan $1 \geq \sin x$ og multiplikasjon med x endrer ikkje ulikskapen når $x \geq 0$). Difor ligg kurva $y = x$ over kurva $y = x \sin x$ mellom $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$, der kurvene skjer kvarandre. Arealet er dimed gjeve ved

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x \sin x)\ dx.$$

Vi løyser det eine integralet vi treng ved hjelp av *delvis integrasjon* med

$$U = x, \quad dV = \sin x\ dx, \quad \text{slik at } dU = dx \quad V = -\cos x.$$

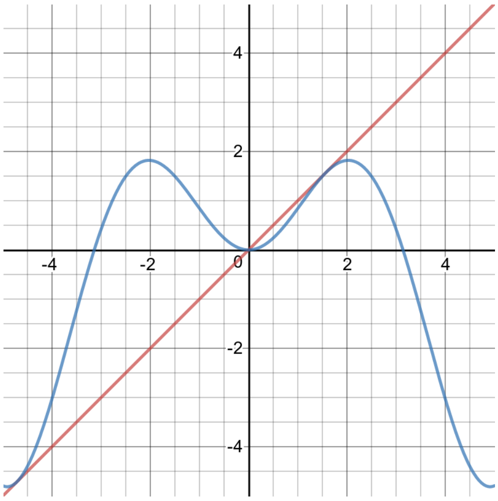
Då har vi

$$\begin{aligned} \int x \sin x\ dx &= \int U\ dV = UV - \int V\ dU = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

Vi går attende til arealet vi skulle finne:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)\ dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\cos x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \\ &= \frac{\pi^2}{8} - 1.\end{aligned}$$

PS: Her er ei teikning av korleis kurvene $y = x$ (i raudt) og $y = x\sin x$ (i blått) ligg i høve til kvarandre i planet.



OPPGÅVE 8

ALTERNATIV I: Vi multipliserer likninga

$$\frac{dy}{dx} + x^2y = x^2$$

med den *integrerande faktoren*

$$e^{\mu(x)},\ \text{ kor }\ \mu(x) = \frac{1}{3}x^3\ \text{ (ein antiderivert til } x^2).$$

Då får vi

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot y' + e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot x^2y &= e^{\frac{1}{3}x^3}x^2 \\ e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot y' + \left(e^{\frac{1}{3}x^3}\right)'y &= e^{\frac{1}{3}x^3}x^2 \\ \left(e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot y\right)' &= e^{\frac{1}{3}x^3}x^2 \qquad (\dagger) \\ e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot y &= \int e^{\frac{1}{3}x^3}x^2\ dx \\ e^{\frac{1}{3}x^3}\cdot y &\overset{(*)}{=} e^{\frac{1}{3}x^3} + C \\ y &= 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}. \end{aligned}$$

(Det vert ikkje gjeve trekk for å nytte løysingsformelen $y(x) = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} x^2 \, dx$ i boks i læreboka i §7.9, som (i praksis) gjev (†) direkte.) I overgongen (∗) nytta vi at vi såg at $e^{\frac{1}{3}x^3}x^2$ er den deriverte til $e^{\frac{1}{3}x^3}$. Om vi ikkje ser dette med ein gong, nyttar vi subsitusjonen $u = \frac{1}{3}x^3$, slik at $du = \frac{du}{dx}dx = x^2 dx$, og vi får

$$\int e^{\frac{1}{3}x^3} x^2 \, dx = \int e^u \, du = e^u + C = e^{\frac{1}{3}x^3} + C.$$

Vi set inn startverdien $y(0) = 5$ i den generelle løysinga vi har funne og finn C:

$$5 = y(0) = 1 + Ce^0 = 1 + C \implies C = 4.$$

Dimed er

$$y(x) = 1 + 4e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

ALTERNATIV II: Vi omskriv differensiallikninga som

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1 - y),$$

som er separabel. Sidan startkravet $y(0) = 5$ eliminerer den konstante løysinga $y = 1$, kan vi dele båe sider med $y - 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-y}\frac{dy}{dx} &= x^2 \\
\frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx} &= -x^2 \\
\int \frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx}\, dx &= -x^2 \, dx \\
\int \frac{1}{y-1}\, dy &= -\int x^2 \, dx \\
\ln|y-1| &= -\frac{1}{3}x^3 + C \\
|y-1| &= e^{-\frac{1}{3}x^3 + C} \\
|y-1| &= C'e^{-\frac{1}{3}x^3} \quad (C' = e^C) \\
y - 1 &= \pm C'e^{-\frac{1}{3}x^3} \\
y - 1 &= C''e^{-\frac{1}{3}x^3} \quad (C'' = \pm C') \\
y &= C''e^{-\frac{1}{3}x^3} + 1.
\end{aligned}$$

Som i førre alternativ, gjev startkravet $y(0) = 5$ den same løysinga som før.

OPPGÅVE 9

(a) Volumet V av vatn i karet når vannhøgda er h er volumet av rotasjonsleikamen vi får når vi dreier området avgrensa av

$$y = 0, \quad y = h, \quad x = f(y), \quad x = 0$$

om y-aksa. Ved skivemetoden er dette lik

$$V = \pi \int_0^h \left(f(y)^2\right)\, dy. \tag{4}$$

Torricelli si lov seier at det finst ein positiv konstant k slik at

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{h}. \tag{5}$$

Set vi saman (4) og (5) og nyttar *kjerneregelen* og *fundamentalteoremet i kalkulus*, får vi

$$-k\sqrt{h} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\pi \int_0^h \left(f(y)^2\right)\, dy\right)\cdot h'(t) = \pi f(h)^2 \cdot h'(t)$$

Altså er

$$f(h)^2 \cdot h'(t) = -\frac{k}{\pi}\sqrt{h},$$

som er det vi skulle syne (med $K = \frac{k}{\pi}$).

(b) Set vi inn $f(y) = \sqrt[4]{y}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}$ i differensiallikninga frå (a), får vi

$$\sqrt{h}\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) h'(t) = -K\sqrt{h}, \tag{6}$$

det vil seie

$$\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) h'(t) = -K. \tag{7}$$

(Her har vi gått ut frå at $h \neq 0$. Tilfellet $h = 0$ er riktignok ei (konstant) løysing på (6), men han kan vi sjå bort frå, sidan dei gjevne opplysingane i oppgåva seier at tanken er full i byrjinga.) Denne differensiallikninga er separabel, og vi har

$$\begin{aligned}
\int \sin\left(\frac{\pi h}{2}\right)\, dh &= \int -K\, dt \\
-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) &= -Kt + C \\
\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) &= \frac{K\pi}{2}t - \frac{C\pi}{2}
\end{aligned}$$

Ved å setje $A = \frac{K\pi}{2}$ og $B = -\frac{C\pi}{2}$, kan vi forenkle til

$$\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) = At + B.$$

Vi har fått opplyst at $h = 2$ når $t = 0$ og $h = 1$ når $t = 1$. Desse opplysningane gjev dei to likningane:

$$\begin{aligned}
-1 = \cos\pi &= 0 + B \\
0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= A + B,
\end{aligned}$$

som gjev $A = 1$ og $B = -1$. Altså er

$$\cos\left(\frac{\pi h}{2}\right) = t - 1. \tag{8}$$

Karet er tomt når $h = 0$, og set vi dette inn i (8), får vi

$$1 = \cos 0 = t - 1,$$

det vil seie $t = 2$, altså:

Karet er tomt etter 2 timar.

OPPGÅVE 10

Vi har per definisjon at

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{9}$$

ALTERNATIV I: Opplysingane seier at f er kontinuerleg på $[c, x]$ og derivérbar på (c, x) når $c < x < b$, og likeleis at f er kontinuerleg på $[x, c]$ og derivérbar på (x, c) når $a < x < c$. Vi kan dimed nytte *sekantsetninga* som seier at det finst ein s mellom c og x slik at

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(s).$$

Når $x \to c$ vil $s \to c$ (sidan s ligg mellom c og x), slik at

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} f'(s) = \lim_{s\to c} f'(s).$$

Opplysingane i oppgåva seier at denne grensa eksisterer. Dimed er f derivérbar i c med $f'(c) = \lim_{s\to c} f'(s)$, som syner at f' er kontinuerleg i c òg.

PS: Litt meir detaljar om kvifor $\lim_{x\to c} f'(s) = \lim_{s\to c} f'(s)$: Set $L = \lim_{x\to c} f'(x)$. Gjeve $\epsilon > 0$. Vel $\delta > 0$ slik at $|f'(x) - L| < \epsilon$ når $|x - c| < \delta$. Men om $|x - c| < \delta$, då er òg $|s - c| < \delta$ (fordi s ligg mellom c og x), og dimed er òg $|f'(s) - L| < \epsilon$.

ALTERNATIV II: Sidan f er kontinuerleg i c, vil per definisjon $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - f(c)) = f(c) - f(c) = 0$. Vi kan difor freiste med l'Hôpital sin regel for å rekne ut grensa i (9), sidan både $f(x) - f(c) \to 0$ og $x - c \to 0$, og $\frac{d}{dx}(x - c) = 1 \neq 0$:

$$\lim_{x\to c} \frac{\frac{d}{dx}(f(x) - f(c))}{\frac{d}{dx}(x - c)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to c} f'(x).$$

Opplysingane i oppgåva seier at denne grensa eksisterer. Dimed gjev l'Hôpital sin regel at $f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$. Dette syner både at f derivérbar i c og at f' er kontinuerleg i c.

Andreas Leopold Knutsen