Bokmål

UNIVERSITETET I BERGEN

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT111 - Grunnkurs i matematikk I

Onsdag 10. mai, 2017, 09.00-14.00

- Tillatte hjelpemidler: Boken av R. A. Adams and C. Essex, "Calculus – A complete course", kalkulator som er godkjent av fakultetet.
- Oppgavesettet er på 4 sider. Alle delene av oppgavene vil bli vurdert likt.
- *Svar må være begrunnet for å få uttelling.*

Oppgave 1.

a) Finn de reelle tallene x og y slik at det komplekse tallet $z = x+iy$ løser systemet

$$\begin{cases} |z+i| = |z-1|, \\ |z| = 4. \end{cases}$$

Tegn i det komplekse planet alle punktene som opprettholder hver av ligningene i systemet. Merk av løsningen på hele systemet i det komplekse planet.

b) Skriv det komplekse tallet $(-1-i)^6$ på formen $re^{\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ (polarform) og på formen $a+ib$ (kartesisk form).

c) Finn de komplekse tallene w som opprettholder ligningen $w^4 = -16$ i både polarform og kartesisk form og merk av løsningene i det komplekse planet.

Oppgave 2.

a) Vis at $\lim_{x\to 2+} \pi^{(x-2)(\ln(x-2))^2} = 1.$

b) Finn grensen $\lim_{x\to i} \frac{x^2+2ix+3}{x^2+1}$ eller vis at den ikke eksisterer.

Oppgave 3.

a) Finn verdiene for α og β slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cos x + 2, & \text{for} \quad x < 0, \\ \beta e^{3x} + \alpha x^2, & \text{for} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig på intervallet $(-\infty, +\infty)$.

b) For hvilken verdier av α og β er funksjonen deriverbar?

Oppgave 4.

Finn de ubestemte integralene

$$a) \int \tan(x) \ln(\cos x)\, dx, \qquad b) \int (x^2 - 2x + 5)e^{2x}\, dx.$$

Oppgave 5.

La $f(x) = e^{-x}(x^2 + 5x + 1)$ være definert på $(-\infty, +\infty)$.
a) Finn maksimum og minimum til funksjonen.
b) Finn asymptotene til funksjonen.
c) Finn vendepunktene til funksjonen og bestem hvor funksjonen er konkav og konveks.
d) Tegn grafen til funksjonen.

Oppgave 6.

a) Finn y som en funksjon av x ved å løse det følgende initialverdi problemet

$$\begin{cases} y\frac{dy}{dx} = -\frac{9a^2}{(a+x)^2}, \\ y(0) = 3\sqrt{a}, \end{cases}$$

der a er en positiv konstant.

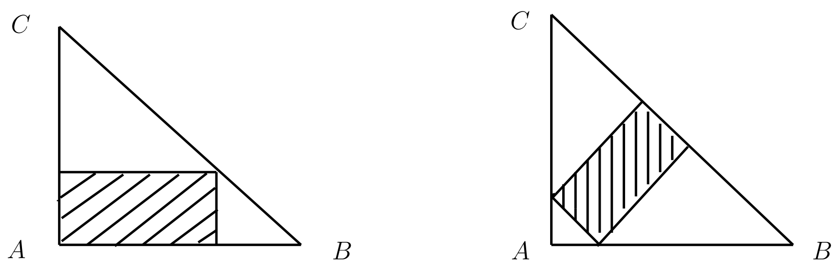
b) Finn $y'(0)$ og $y''(0)$ uten å løse initialverdi problemet og finn Taylorpolynomet $P_2(x)$ rundt $x = 0$.

c) Finn andre ordens tilnærmte verdi av løsningen på initialverdi problemet $y(x)$ i punktet $x = a$.

d) Hva er restleddet $E_2(x)$ ved $x = a$?

Oppgave 7.

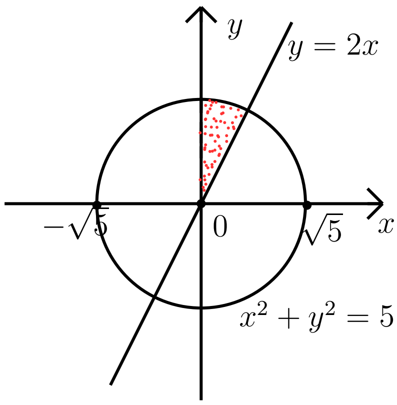
La ABC være en rettvinklet trekant slik at $|AB| = |AC|$ og $|BC| = 2\sqrt{2}$. La rektangelene være inngravert i trekanten ABC på to måter som vist på tegningene.



I begge tilfeller, finn lengdene på sidene til rektangelene slik at arealet blir maksimalt. Hva er likt i de to tilfellene og hva er forskjellig?

Oppgave 8.

Regn ut volumet til overflaten som oppnås ved å rotere rundt y-aksen området som er på innsiden av sirkelen $x^2 + y^2 = 5$ mellom linjen $y = 2x$ og den vertikale aksen. Det er det prikkete området som er vist på tegningen.



Lykke til!

Professor: Irina Markina

Gruppeleder: Eirik Berge