Løysingsforslag Eksamen MAT111–Grunnkurs i Matematikk I
Universitetet i Bergen, Hausten 2018

OPPGÅVE 1

Nytt matematisk induksjon til å syne at den n-te deriverte til funksjonen

$$f(x) = \ln(2x+1), \quad x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \infty\right)$$

er gjeven ved

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}2^n(n-1)!}{(2x+1)^n}$$

for alle heiltal $n \geq 1$. (Hugs at $0! = 1$.)

Løysing: Vi har $f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}$. Den gjevne formelen for $n = 1$ seier

$$f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^2 2^1 0!}{(2x+1)^1} = \frac{2}{(2x+1)},$$

slik at formelen stemmer for $n = 1$.

Gå nå ut frå at formelen stemmer for $n = k$, der $k \geq 1$ er eit vilkårleg heiltal, det vil seie at:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}2^k(k-1)!}{(2x+1)^k}.$$

Då er

$$\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x)\right)' = (-1)^{k+1}2^k(k-1)! \cdot \left(\frac{1}{(2x+1)^k}\right)' \\
&= (-1)^{k+1}2^k(k-1)! \cdot \left(-k \cdot \frac{1}{(2x+1)^{k+1}} \cdot 2\right) \\
&= (-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot 2^k \cdot 2 \cdot (k-1)! \cdot k \cdot \frac{1}{(2x+1)^{k+1}} \\
&= (-1)^{k+2} \cdot 2^{k+1} \cdot k! \cdot \frac{1}{(2x+1)^{k+1}} \\
&= \frac{(-1)^{k+2}2^{k+1}k!}{(2x+1)^{k+1}},
\end{aligned}$$

som er den gjevne formelen insett $n = k+1$. Vi har dimed synt at viss formelen held for $n = k$, der $k \geq 1$ er eit vilkårleg heiltal, då gjeld han òg for $n = k+1$.

Vi har dimed synt den gjevne formelen ved matematisk induksjon.

OPPGÅVE 2

Nytt den formelle definisjonen av grenseverdi ("ϵ-δ-definisjonen") til å syne at

$$\lim_{x \to -1} \left(x^2 - 5x + 2\right) = 8.$$

Løysing: Gjeve $\epsilon > 0$. Skal finne $\delta > 0$ slik at

$$(*) \quad \left|\left(x^2 - 5x + 2\right) - 8\right| < \epsilon \text{ når } 0 < |x - (-1)| < \delta.$$

Har

$$\left|\left(x^2 - 5x + 2\right) - 8\right| = \left|x^2 - 5x - 6\right| = |x + 1| \cdot |x - 6| . \tag{1}$$

Viss til dømes

$$|x + 1| < 1 \tag{2}$$

har vi

$$-1 < x + 1 < 1 \Longleftrightarrow -8 < x - 6 < -6 \Longrightarrow |x - 6| < 8,$$

slik at

$$|x + 1| \cdot |x - 6| < 8\,|x + 1| . \tag{3}$$

Viss då samstundes

$$|x + 1| < \frac{\epsilon}{8}, \tag{4}$$

vil

$$8\,|x + 1| < 8 \cdot \frac{\epsilon}{8} = \epsilon. \tag{5}$$

Lat då $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{8}\}$. Då, viss

$$0 < |x + 1| < \delta,$$

vil både (4) og (2) vere oppfylde, og (1), (3) og (5) syner at $(*)$ er oppfylt.

OPPGÅVE 3

Finn konstanten c slik at funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin^{-1}(x)}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1), \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

vert kontinuerleg i 0.

Løysing: Funksjonen f er per definisjon kontinuerleg i 0 viss og berre viss $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, det vil seie viss og berre viss

$$c = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin^{-1} x}. \tag{6}$$

For å rekne ut grensa nyttar vi *l'Hôpital sin regel*, sidan

$$\lim_{x\to 0} e^{2x} - 1 = e^0 - 1 = 0 \text{ og } \lim_{x\to 0} \sin^{-1} x = \sin^{-1} 0 = 0$$

og

$$\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \neq 0 \text{ (i ein punktert omeign om 0).}$$

Vi har

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{2x} - 1\right)'}{\left(\sin^{-1} x\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{2e^0}{\frac{1}{\sqrt{1}}} = 2.$$

Dimed er $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin^{-1}x} = 2$ ved l'Hôpital sin regel. Frå (6) konkluderer vi difor at $c = 2$.

OPPGÅVE 4

Avgjer om funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

er derivérbar i 0.

Løysing: Funksjonen f er per definisjon derivérbar i 0 viss og berre viss

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{eksisterer.}$$

Vi har

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

For å rekne ut denne grensa nyttar vi *skviseteoremet*: vi har

$$\left|\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq 1 \quad \text{for} \quad h \neq 0$$

og dimed, ved å multiplisere med $|\sin(h)|$:

$$|\sin(h)|\cdot\left|\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)\right| \leq |\sin(h)| \quad \text{for} \quad h \neq 0,$$

som gjev oss

$$-|\sin(h)| \leq \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \leq |\sin(h)| \quad \text{for} \quad h \neq 0,$$

Sidan $\lim_{h\to 0}|\sin(h)| = 0$, gjev *skviseteoremet* oss at

$$\lim_{h\to 0}\sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0.$$

Altså eksisterer grensa og f er derivérbar i 0.

Merknad: Vi kunne òg starta med

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \leq 1 \quad \text{for} \quad h \neq 0$$

og multiplisert med $\sin(h)$. Då måtte vi hugsa på å snu ulikskapane når $\sin(h) < 0$, og vi ville fått dei to tilfella:

$$-\sin(h) \leq \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \leq \sin(h) \quad \text{for} \quad h \in (0,\pi)$$

og

$$-\sin(h) \geq \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) \geq \sin(h) \quad \text{for} \quad h \in (-\pi,0)$$

og *skviseteoremet* ville gjeve oss $\lim_{h\to 0^+} \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$ og $\lim_{h\to 0^-} \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$, som igjen ville gjeve oss $\lim_{h\to 0} \sin(h)\cos\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$.

OPPGÅVE 5

Syn at kurva gjeven ved likninga

$$2xy + \sin y = 2\pi$$

går gjennom punktet $(1, \pi)$ og finn likninga til tangentlina i dette punktet.

Løysing: Kurva C går gjennom punktet $(x, y) = (1, \pi)$, fordi likninga er oppfylt for $x = 1$ og $y = \pi$: venstresida er nemleg lik $2 \cdot 1 \cdot \pi + \sin(\pi) = 2\pi$, som høgresida.

Vi deriverer båe sidene av likninga med omsyn på x og omhandlar y som ein funksjon av x lokalt rundt eitkvart punkt. (Vi går ut frå at likninga nær eitkvart punkt (x, y) definerer y implisitt som ein *derivérbar* funksjon av x.) Stigninga til tangentlina i punktet $(1, \pi)$ er då $\frac{dy}{dx}$ i dette punktet.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2xy + \sin y) &= \frac{d}{dx}(2\pi) \\
2y + 2x\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
2y + (2x + \cos y)\frac{dy}{dx} &= 0.
\end{aligned}$$

Set vi inn $x = 1$ og $y = \pi$, får vi:

$$\begin{aligned}
2\pi + (2 \cdot 1 + \cos\pi)\frac{dy}{dx}|_{x=1,y=\pi} &= 0 \\
2\pi + \frac{dy}{dx}|_{x=1,y=\pi} &= 0
\end{aligned}$$

det vil seie

$$\frac{dy}{dx}|_{x=1,y=\pi} = -2\pi.$$

Stigninga til tangentlina er dimed -2π og likninga for tangentlina er

$$y - \pi = -2\pi(x - 1)$$

det vil seie

$$y = -2\pi x + 3\pi. \tag{7}$$

Alternativt kan vi òg omhandla x som funksjon av y og derivere likninga implisitt med omsyn på y:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy}(2xy + \sin y) &= \frac{d}{dy}(2\pi) \\
2\frac{dx}{dy}y + 2x + \cos y &= 0
\end{aligned}$$

Set vi inn $x = 1$ og $y = \pi$, får vi $2\pi \frac{dx}{dy}|_{x=1,y=\pi} + 2 - 1 = 0$, det vil seie $\frac{dx}{dy}|_{x=1,y=\pi} = -\frac{1}{2\pi}$. Her lyt vi vere varsame, for dette er stigninga til tangentlina med rollene til x og y bytta om. Likninga til tangentlina vert dimed

$$x - 1 = -\frac{1}{2\pi}(y - \pi),$$

som gjev oss (7) som før etter ein liten omskriving.

Atter alternativt kan vi løyse likninga som definerer kurven med omsyn på x og finne det eksplisitte uttrykket for x som funksjon av y:

$$x = \frac{2\pi - \sin y}{2y}.$$

Då kan vi finne den deriverte av x med omsyn på y ved hjelp av den vanlege kvotientregelen:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\cos y \cdot 2y - (2\pi - \sin y) \cdot 2}{4y^2}.$$

Set vi inn $x = 1$ og $y = \pi$, får vi $\frac{dx}{dy}|_{x=1,y=\pi} = -\frac{1}{2\pi}$ som i førre alternativ, og vi kan rekne ut likninga til tangentlina som ovanfor.

OPPGÅVE 6

Grunngje at funksjonen

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right), \ x \in [1, \infty),$$

har ein invers funksjon f^{-1} og finn eit uttrykk for f^{-1}.

Løysing: For å grunngje at f har ein invers funksjon, syner vi at f er ein-til-ein. Vi har

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2 - 2x + 2\right) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \cdot (2x - 2) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}.$$

Vi har difor $f'(x) > 0$ for $x > 1$, slik at f er *strengt vaksande* på $[1, \infty)$, og dimed ein-til-ein, for viss $x_1 < x_2$, då er $f(x_1) < f(x_2)$, og spesielt er då $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Alternativt syner *Rolle sitt teorem* direkte at f er ein-til-ein, for viss $f(x_1) = f(x_2)$ for $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ og $x_1 \neq x_2$, seier teoremet at det finst ein c mellom x_1 og x_2 og dimed ein $c \in (1, \infty)$ slik at $f'(c) = 0$, som er ein motsetnad.

Atter alternativt så er $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ strengt vaksande for $x \geq 1$ og dimed ein-til-ein. Sidan $\ln x$ er strengt vaksande og dimed ein-til-ein, er òg $\ln(x^2 - 2x + 2)$ ein-til-ein, for viss $x_1 \neq x_2$, er $x_1^2 - 2x_1 + 2 \neq x_2^2 - 2x_2 + 2$ (sidan $x^2 - 2x + 2$ er ein-til-ein), og dimed $\ln\left(x_1^2 - 2x_1 + 2\right) \neq \ln\left(x_2^2 - 2x_2 + 2\right)$ (sidan $\ln x$ er ein-til-ein).

For å finne uttrykket for den inverse funksjonen f^{-1}, løyser vi likninga

$$y = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

med omsyn på x for $x \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) \\ e^y &= x^2 - 2x + 2 \qquad (8) \\ e^y &= (x-1)^2 + 1 \\ e^y - 1 &= (x-1)^2 \\ \pm\sqrt{e^y - 1} &= x - 1 \qquad (9) \end{aligned}$$

Her er det det positive forteiknet vi må velje, sidan $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{e^y - 1} &= x - 1 \\ \sqrt{e^y - 1} + 1 &= x \qquad (10) \end{aligned}$$

Dette syner at $f^{-1}(y) = \sqrt{e^y - 1} + 1$, eller

$$f^{-1}(x) = \sqrt{e^x - 1} + 1.$$

Merknad 1: Vi kunne sjølvsagt òg skreve (8) som $x^2 - 2x + 2 - e^y = 0$ og nytta løysingsformelen for andregradslikningar: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - e^y)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4e^y - 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{e^y - 1}$, som gjev oss (9).

Merknad 2: Det vart ikkje ekplisitt spurd om definisjonsmengda til f^{-1}, men det vert gjeve "pluss i margen" til dei som finn han: Definisjonsmengda til f^{-1} er lik verdimengda til f. Sidan f er vaksande er $f(x) \geq f(1) = \ln 1 = 0$ og sidan $x^2 - 2x + 2 \to \infty$ når $x \to \infty$, vil $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Sidan f er kontinuerleg, er verdimengda til f lik heile intervallet $[0, \infty)$ ved *skjeringssetninga*, slik at definisjonsmengda til f^{-1} er $[0, \infty)$.

Merknad 3: Kjeda av likskapar ovanfor syner at

$$y = f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) \iff x = \sqrt{e^y - 1} + 1, \quad \text{for } x \in [1, \infty).$$

Dette kan òg nyttast til å syne at f er ein-til-ein, sidan

$$f(x_1) = f(x_2),\ x_1, x_2 \in [1, \infty) \Longrightarrow x_1 = \sqrt{e^{f(x_1)-1}} + 1 = \sqrt{e^{f(x_2)-1}} + 1 = x_2.$$

OPPGÅVE 7

(a) Syn at likninga $x^3 e^x = 1$ har nøyaktig *ei* løysing (på heile $\mathbb{R}$) og at løysinga ligg i intervallet $(0, 1)$.

(b) Grunngje kort at løysinga på likninga frå (a) er eit fikspunkt til funksjonen

$$g(x) = e^{-\frac{x}{3}}.$$

Utfør så to trinn av fikspunktiterasjon med startverdi $x_0 = 0$ for å finne ein tilnærma verdi x_2 til løysinga og lag ei skisse som forklarar kva som skjer. (Spesielt bør skissa forklare om x_2 er større eller mindre enn den verkelege verdien til løysinga.)

Løysing (a)–ALTERNATIV I: Løysingane på likninga er nullpunkta til funksjonen

$$f(x) = x^3 e^x - 1.$$

Sidan $f(0) = -1 < 0$ og $f(1) = e - 1 > 0$, og f er *kontinuerleg*, har f eit nullpunkt i intervallet $(0, 1)$ ved *skjeringssetninga.*

Vi har $f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3 + x)$. Sidan $f'(x) > 0$ når $x > 0$ kan f ha høgst eitt nullpunkt på $[-3, \infty)$. Anten kan dette grunngjevast med at f er strengt vaksande og dimed ein-til-ein på $[-3, \infty)$, eller ved *Rolle sitt teorem* direkte, som seier at viss f hadde hatt to nullpunkt på $[-3, \infty)$, ville vi hatt minst eitt punkt i mellom nullpunkta, det vil seie i $(-3, \infty)$, der den deriverte til f var null.

Når $x \leq 0$, er $f(x) = x^3e^x - 1 \leq -1 < 0$, slik at f ikkje har noko nullpunkt på $(-\infty, 0]$.

Vi har altså synt at f har nøyaktig eitt nullpunkt, og at dette ligg i intervallet $(0, 1)$, som syner at likninga har nøyaktig ei løysing, og at ho ligg i intervallet $(0, 1)$.

Løysing (a)–ALTERNATIV II: Sidan likninga kan omskrivast som:

$$x^3e^x = 1 \iff x^3 = e^{-x} \iff x^3 - e^{-x} = 0,$$

er løysingane på likninga lik nullpunkta til funksjonen

$$h(x) = x^3 - e^{-x}.$$

Sidan $h(0) = 0 - e^0 = -1 < 0$ og $h(1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} > 0$, og h er *kontinuerleg*, har h eit nullpunkt i intervallet $(0, 1)$ ved *skjeringssetninga.*

Vi har $h'(x) = 3x^2 + e^{-x} > 0$ for alle x, slik at h kan dimed ha høgst eitt nullpunkt. Som før kan dette anten grunngjevast med at h er strengt vaksande og dimed ein-til-ein eller eller ved *Rolle sitt teorem* direkte, som seier at viss h hadde hatt to nullpunkt, ville vi hatt minst eitt punkt der den deriverte til h var null.

Løysing (b): Likninga kan omskrivast som:

$$x^3e^x = 1 \iff x^3 = e^{-x} \iff x = \left(e^{-x}\right)^{\frac{1}{3}} \iff x = e^{-\frac{x}{3}},$$

som syner at løysinga på likninga er eit fikspunkt til funksjonen $g(x) = e^{-\frac{x}{3}}$.

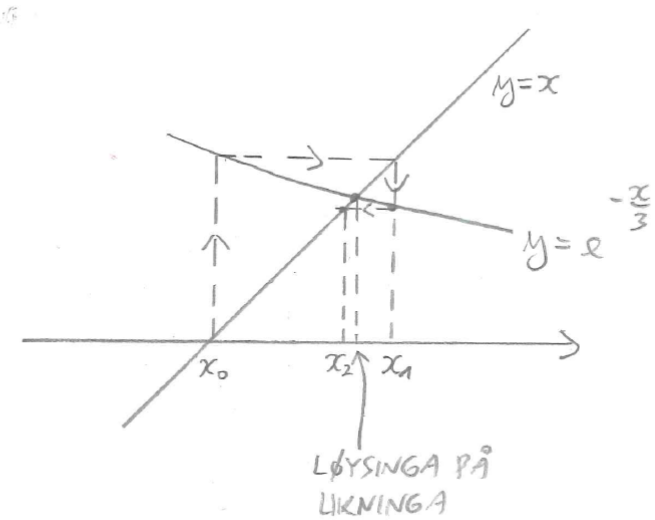
To trinn av fikspunktiterasjon med startverdi $x_0 = 0$ gjev:

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = g(0) = e^{-\frac{0}{3}} = e^0 = 1, \\ x_2 &= g(x_1) = g(1) = e^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

For å skissere grafen til g med omtrent riktig stigning, legg vi merke til at $g'(x) = \frac{-1}{3}e^{-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3e^{\frac{x}{3}}}$, slik at

$$-\frac{1}{3} \leq g'(x) < 0 \text{ for } x \geq 0.$$

(Krumminga på g er ikkje naudsynt å ta med, men han er positiv, sidan $g''(x) = \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{3} \cdot e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}} > 0$.) Figuren nedanfor syner kva som skjer med fikspunktiterasjonen: $x_0 = 0$ ligg til høgre for fikspunktet, $x_1 = 1$ ligg til venstre (dette visste vi allereie, sidan fikspunktet ligg i intervallet $(0, 1)$), medan $x_2 = e^{-\frac{1}{3}}$ ligg til venstre att. (Dette er byrjinga på *spiralkonvergens.*)



OPPGÅVE 8

Lat f vere ein vilkårleg dobbeltderivérbar reell funksjon definert på eit ope intervall I som inneheld 1 og 3. Gå ut frå at $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$ og at $0 \leq f''(x) \leq 1$ for alle $x \in I$. Gje eit minst mogleg intervall der $f(3)$ ligg.

Løysing–ALTERNATIV I: *Taylor sitt teorem* seier at vi for alle $x \in I$ har:

$$\begin{aligned} f(3) &= f(1) + f'(1)(3-1) + \frac{f''(s)}{2!}(3-1)^2 \\ &= f(1) + 2f'(1) + 2f''(s), \end{aligned}$$

for ein $s \in (1, 3)$. Dei gjevne opplysingane om at $f(1) = 0$ og $f'(1) = 1$ gjev oss at

$$f(3) = 2 + 2f''(s) \text{ for ein } s \in (0, 1).$$

Sidan $(0, 1) \subset I$, gjev ei av opplysingane i oppgåva at $0 \leq f''(s) \leq 1$ og difor at

$$2 + 2 \cdot 0 \leq f(3) = 2 + 2f''(s) \leq 2 + 2 \cdot 1,$$

altså er

$$f(3) \in [2, 4].$$

Løysing–ALTERNATIV II: Sidan $0 \leq f''(x) \leq 1$ for alle $x \in I$, har vi

$$\int_1^x 0 \, dt \leq \int_1^x f''(t) \, dt \leq \int_1^x 1 \, dt \text{ for alle } x \in I$$

og *fundamentalteoremet i kalkulus (del II)* gjev at

$$0 \leq f'(x) - f'(1) \leq x - 1 \text{ for alle } x \in I,$$

det vil seie, sidan $f'(1) = 1$, at

$$1 \leq f'(x) \leq x \text{ for alle } x \in I.$$

Dimed er

$$\int_1^3 1\,dx \le \int_1^3 f'(x)\,dx \le \int_1^3 x\,dx,$$

og *fundamentalteoremet i kalkulus (del II)* att gjev at

$$[x]_1^3 \le [f(x)]_1^3 \le \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3,$$

det vil seie

$$2 \le f(3) - f(1) \le \frac{1}{2}\left(3^2 - 1^2\right).$$

Sidan $f(1) = 0$, får vi

$$f(3) \in [2, 4].$$

Løysing–ALTERNATIV III: *Sekantsetninga* gjev at

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \quad \text{for ein } c \in (1, 3),$$

Ved den gjevne opplysinga at $f(1) = 0$ får vi difor

$$f(3) = 2f'(c) \quad \text{for ein } c \in (1, 3). \tag{11}$$

Sekantsetninga på f' gjev at

$$\frac{f'(c) - f'(1)}{c - 1} = f''(s) \quad \text{for ein } \; s \in (1, c). \tag{12}$$

Spesielt har vi $s \in I$, slik at $0 \le f''(s) \le 1$ ved dei gjevne opplysingane. Samstundes veit vi at $f'(1) = 1$. Dimed vert (12) til

$$\begin{array}{rcl} 0 \le & \frac{f'(c)-1}{c-1} \le & 1 \\ 0 \le & f'(c) - 1 \le & c - 1 \\ 1 \le & f'(c) \le & c \end{array}$$

Sidan $c \in (1, 3)$, får vi $1 \le f'(c) < 3$, som insatt i (11) gjev oss

$$2 \cdot 1 \le f(3) < 2 \cdot 3,$$

altså at

$$f(3) \in [2, 6).$$

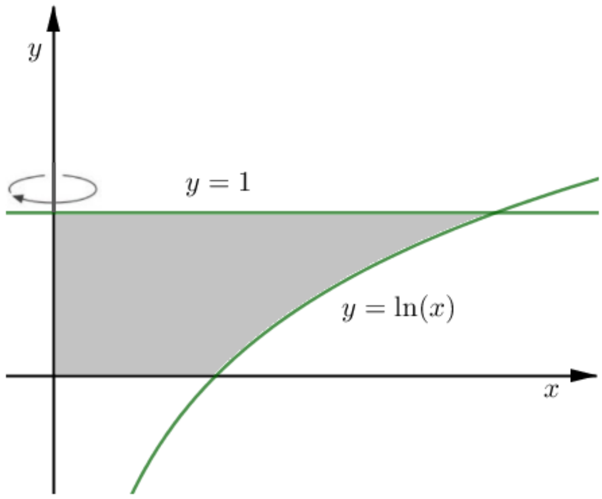
(Denne framgangsmåten gjev oss altså eit svakare resultat enn dei førre.)

OPPGÅVE 9

Rekn ut volumet av omdreiingslekamen som framkjem ved å dreie området i første kvadrant i planet avgrensa av kurvene

$$y = 0, \quad y = 1, \quad x = 0 \;\text{ og }\; y = \ln x,$$

som synt i figuren nedanfor, om y-aksa. (Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)



Løysing–ALTERNATIV I: Sylinderskallmetoden Kurvene $y = 1$ og $y = \ln x$ skjer kvarandre når $\ln x = 1$, det vil seie for $x = e$. Kurva $y = \ln x$ skjer x-aksa i $x = 1$.

Vi del området i to delar:

- Området for $0 \leq x \leq 1$, avgrensa av øvste kurve $y = 1$ og nedste kurve $y = 0$;
- Området for $1 \leq x \leq e$, avgrensa av øvste kurve $y = 1$ og nedste kurve $y = \ln x$;

Sylinderskallmetoden gjev difor at volumet V av omdreiingsleikamen er:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \left(\int_0^1 x \cdot (1-0)\, dx + \int_1^e x \cdot (1 - \ln x)\, dx \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^1 x\, dx + \int_1^e x\, dx - \int_1^e x \ln x\, dx \right) \\ &= 2\pi \left(\int_0^e x\, dx - \int_1^e x \ln x\, dx \right). \end{aligned}$$

(Sjølvsagt går det òg an å grunngje at første integral $2\pi \int_0^1 x \cdot (1-0)\, dx$ er volumet til ein sylinder av høgd 1 og radius 1.)

Vi løyser det eine integralet $\int x \ln x\, dx$ vi treng ved hjelp av *delvis integrasjon* med

$$U = \ln x, \quad dV = x\, dx, \quad \text{slik at} \quad dU = \frac{1}{x} dx; \text{ og } \quad V = \frac{1}{2} x^2.$$

Då har vi

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int U \, dV = UV - \int V \, dU = \ln x \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \\
&= \frac{1}{4}x^2 \left(2 \ln x - 1\right) + C.
\end{aligned}$$

Vi går attende til volumet vi skulle finne:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \left(\int_0^e x \, dx - \int_1^e x \ln x \, dx \right) \\
&= 2\pi \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^e - \left[\frac{1}{4}x^2 \left(2 \ln x - 1\right) \right]_1^e \right) \\
&= 2\pi \left(\left[\frac{1}{2}e^2 - 0 \right] - \left[\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \cdot (-1) \right] \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

Løysing–ALTERNATIV II: Skivemetoden Kurva $y = \ln x$ kan skrivast som $x = e^y$, og området som vert dreidd er då området for $0 \leq y \leq 1$ avgrensa av $x = e^y$ og y-aksa. *Skivemetoden* gjev difor at volumet V av omdreiingsleikamen er:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \left(\int_0^1 \left(e^y\right)^2 \, dy \right) \\
&= \pi \left(\int_0^1 e^{2y} \, dy \right) \\
&= \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} \right]_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

OPPGÅVE 10

Rekn ut det ueigentlege integralet

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$$

(Integral i utrekninga skal løysast ved grunnleggjande integrasjonsteknikkar, ikkje ved å slå opp i permen i læreboka.)

Løysing: Vi løyser først integralet $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$ ved substitusjonen $u = \sqrt{x}$. Det gjev $u^2 = x$ og dimed

$$dx = \frac{dx}{du}\,du = 2u\,du.$$

Då har vi

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \int \frac{2u\,du}{u(u^2+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\tan^{-1} u + C = 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C.$$

Det ueigentlege integralet vert då

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[2\tan^{-1}\sqrt{x}\right]_1^R \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(2\tan^{-1}\sqrt{R} - 2\tan^{-1} 1\right) \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

OPPGÅVE 11

Grunngje at funksjonen

$$f(x) = \int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan t}\,dt$$

er definert for alle $x \in \mathbb{R}$ og rekn ut $f'(x)$. (Skriv svaret på enklast mogleg form.)

Løysing: Sidan funksjonen $\tan t$ er kontinuerleg på intervallet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ og e^t er kontinuerleg overalt, er *samansetningen* $e^{\tan t}$ kontinuerleg på intervallet $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, som inneheld 0. Sidan ein funksjon er integrerbar på intervallar der han er kontinuerleg, har vi at $\int_0^a e^{\tan t}\,dt$ er definert for alle $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Sidan $\tan^{-1}(x)$ er definert for alle $x \in \mathbb{R}$ og $\tan^{-1}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, er funksjonen $f(x) = \int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan t}\,dt$ definert for alle $x \in \mathbb{R}$.

Vi har

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\tan^{-1}(x)} e^{\tan t}\,dt\right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{d}{du}\left(\int_0^u e^{\tan t}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx} \\
&\overset{(**)}{=} e^{\tan u}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\
&= e^{\tan\left(\tan^{-1}(x)\right)}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\
&= e^x\cdot\frac{1}{x^2+1} \\
&\overset{(***)}{=} \frac{e^x}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

der vi har brukt *kjerneregel* med kjerne $u = \tan^{-1}(x)$ i overgong $(*)$, *fundamentalteoremet i kalkulus (del I)* i overgongen $(**)$ og eigenskapen $\tan\left(\tan^{-1}(x)\right) = x$ til inverse funksjonar i overgongen $(***)$.

OPPGÅVE 12

Eit skip fer med ei fart av 25 km/time. Plutseleg ryk motoren. Etter dette avtek farta $v(t)$ til eikvar tid med ein rate som er proporsjonal med kvadratet av farta. Etter ein halv time er farta redusert til 5 km/time.

Kor lang tid tek det før farta har sunke til 1 km/time?

(Hint: set opp ei differensiallikning som farta oppfyller.)

Løysing: Vi lét $v(t)$ vere farta til skipet t timar etter at motoren ryk, målt i km/time. Då veit vi frå dei gjevne opplysingane at

$$\frac{dv}{dt} = -Kv^2, \quad \text{for ein konstant} \quad K > 0.$$

Denne differensiallikninga er separabel. Han har den konstante løysinga $v = 0$, som vi kan sjå bort ifrå på grunn av at vi veit at $v(0) = 25$. Vi kan dimed gå ut frå at $v \neq 0$, og vi har

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v^2} &= \int -K\,dt \\ -\frac{1}{v} &= -Kt + C, \quad \text{for ein} \quad C \in \mathbb{R} \\ v(t) &= \frac{1}{Kt - C} \end{aligned}$$

Vi veit at $v(0) = 25$, som gjev oss $25 = \frac{1}{0-C}$, det vil seie $C = -\frac{1}{25}$. Vi veit òg at $v(1/2) = 5$, som gjev oss

$$5 = \frac{1}{\frac{1}{2}K - C} = \frac{1}{\frac{1}{2}K + \frac{1}{25}} = \frac{50}{25K + 2} \Longrightarrow 25K + 2 = 10 \Longrightarrow K = \frac{8}{25}.$$

Dimed har vi

$$v(t) = \frac{1}{\frac{8}{25}t + \frac{1}{25}} = \frac{25}{8t + 1}.$$

For å finne når farta har sunke til 1 km/time, løyser vi

$$1 = v(t) = \frac{25}{8t + 1} \Longleftrightarrow 8t + 1 = 25 \Longleftrightarrow t = 3$$

Altså har farta sunke til 1 km/time etter 3 timar.

Andreas Leopold Knutsen